6 Banach space ニ於ケル二次 Operator ニツイテ

陸大　清水辰次郎

(10月26日 受付)

Banach空間 (Complete normed linear space) 於ケル near operator ノ性質ハ著シク研究セラレテキルガ更ニ高次ノ operator ヤ解析的 operator ニ関シテハ Banach門下及ビアメリカ於テ幾ツカノ研究ガアルダケデ函数空間論的研究ハ未ダアリ發展シテ居ナイ。

次ニ二次齊次多項式 Operator ニ関スル二三ノ性質ヲ述ヨウ　E, E' ハ複素数ヲオペレータートスル Banach 空間トシ x, y, ---- ヲ以テソノ要素, α, β, ---- ヲ以テ複素数ヲ表ハス

$p(x)$ ハ空間 E ヨリ空間 E' ニ至ル operator トス。

定義.　$p(\alpha x+\beta y) = \alpha^2 p_1(x,y) + \alpha\beta\, p_2(x,y) + \beta^2 p_3(x,y)$ ヲ

満足スル operator $p(x)$ ヲ二次ノ齊次多項式 operator トイフ。此所ニ $p_i(x,y)$ 等ハ $E\times E$ ヨリ E' ヘノ operator デ $p_i(x,y)$ $p(x)$ 等ハ連續性ヲ假定シナイ。

先ヅ定義ヨリ

$\alpha = 1,\ \beta = 0$ トオキ　$p_1(x,y) \equiv p(x)$

$\alpha = 0,\ \beta = 1$ トオキ　$p_3(x,y) \equiv p(y)$

$\alpha = 1,\ \beta = 1$ トオキ　$p_2(x,y) \equiv p_2(y,x)$

ナルヲ知ル.

定義ヨリ明カナ如ク $p(x+\alpha y)$ ハ α ニ関シテ連續デアル

次ニ

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{p(x+\tau y) - p(x)}{\tau} = p_2(x,y)$$

$y = \alpha y_1 + \beta y_2$ トオキ, $\xi = \tau\alpha$, $\eta = \tau\beta$ トヲクコトニヨリ

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{p(x+\xi y_1+\eta y_2)-p(x)}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0} \frac{p(x+\xi y_1+\eta y_2)-p(x+\eta y_2)+p(x+\eta y_2)-p(x)}{\tau}$$

$$= \alpha p_2(x, y_1) + \beta p_2(x, y_2)$$

以上ハ $p(x+\alpha y)$ ガ $\alpha\to 0$ ナルトキ連続ナルコトヨリ出ル．$p(x)$ ノ連続性ハ仮定シナイ．

依ッテ

$$p_2(x, \alpha y_1+\beta y_2) = \alpha\, p_2(x, y_1) + \beta\, p_2(x, y_2)$$

即チ $p_2(x, y)$ ハ x 及ビ y ニ関シテ一次斉次 operator デアル．

依ッテ勿論

$$p_2(x, 0) = p_2(0, y) = 0$$

定理 1. 二次斉次多項式 operator ガ連続ナラバ有界デアル。

($x=0$ ニテ連続ナラバ有界)

仮リニ有界ナラズトシテ，$M_n\to\infty$

$\|p(x_n)\| > M_n \|x_n\|^2$ ナラバ

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{M_n}\,\|x_n\|}\, x_n \quad トオキ \quad \|y_n\| \to 0$$

$$\therefore\ p(y_n) = \frac{1}{M_n \|x_n\|} p(x_n) > 1$$

然ルニ $x=0$ ニテ $p(x)$ ハ連続ナル故

$$p(y_n) \to p(0) = 0$$

定理 2. 二次斉次多項式 operator ガ有界ナラバ連続

先ヅ $x_n\to 0$ ナル系列 x_n ヲ考ヘル

有界ナル故 $\quad \|p(x_n)\| < M \|x_n\|^2$

依ッテ $\quad \|p(x_n)-0\| < M\|x_n\|^2 \to 0$

即チ有界ナラバ，$x=0$ ニテ連続トナル

一方二次斉次多項式 operator ハ

$$p(x+y) = p(x) + p_2(x, y) + p(y)$$

ト書キ表ハサレルカラ，$y_n \to 0$ ナル系列 y_n ニ対シ $p(y)$ ハ $y=0$ ニテ連続且 $p(0)=0$ ナル故，先ヅ $p(y_n) \to 0$

$p_2(x,y)$ ハ x, y ニ関シ additive ナルヲ知ツタカ

$$p_2(x, y) = p(x+y) - p(x) - p(y)$$

カラ有界，即チ

$$\| p_2(x, y) \| < M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \; p_2\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) = p\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) - p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \\ \quad p(x) \text{ ノ仮定カラ右辺ハ } M \text{ ニテ上ニ界セラル} \end{array} \right)$$

x ヲ一定トシテ考ヘレバ $p_2(x, y)$ ハ y ニ関シテ連続ナル故

$$\lim_{y_n \to 0} p_2(x, y_n) = p_2(x, 0) = 0$$

依ツテ

$$p(x+y_n) = p(x) + p_2(x, y_n) + p(y_n)$$

ヨリ

$$p(x+y_n) \to p(x)$$

即チ $p(x)$ ハ連続トナル，以上ノ証明ニテ明カナ如ク

定理　二次斉次多項式 operator ハ一点ニテ連続ナラバスベテノ点ニテ連続トナル.

附記　$p(\alpha x + \beta y) = \alpha^n p_1(x, y) + \alpha^{n-1}\beta\, p_2(x, y) + \cdots + \beta^n p_{n+1}(x, y)$

ヲ以ツテ n 次斉次多項式 operator ヲ定義スレバ

$$p_1(x, y) \equiv p(x),$$

$$p_{n+1}(x, y) \equiv p(y),$$

且，$p_2(x, y)$，$p_3(x, y)$，…，$p_{\,}(x\, y)$ ハ夫々 y ニ関シテ一次，二次，$(n-1)$ 次

x = 関シ $(n-1)$次, $(n-2)$次, ⋯ 一次 ノ operator ナルコトガ示サレル。 $p(x)$ガ連続デナケレバ、ソレラハ連続トハ限ラヌ。

併シ $p(x+\lambda y)$ ハ λ ノ複素函数デアルカラ Cauchy ノ積分表示ガデキテ、

$$p_j(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p(x+\tau y)}{\tau^{j+1}}\, d\tau$$

ヲ得ル。

(C ハ $\tau = 0$ ヲ中心トスル円周)

$$p_j\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{p\left(x+\tau \frac{y}{\|y\|}\right)}{\tau^{j+1}}\, d\tau$$

カラ $p(x)$ ガ有界ナラバ、

$$\leq M_x$$

従ッテ

$$\|p_j(x, y)\| \leq M_x \|y\|^j$$

更ニ上ノ積分表示ヨリ

$$p_j(x, 0) = 0 \qquad j = 2, 3, \cdots, n$$

従ッテ $p(x+y_n) - p(x) = p_1(x, y_n) + \cdots\cdots + p_n(y_n)$

ヨリ明カニ $y_n \to 0$ ナルトキ

$$p(x+y_n) \to p(x)$$

即チ n次齊次多項式 operator ハ有界ナラバ連続デアル。連続ナラバ有界ナルコトモ一点デ連続ナラバ x ノ任意ノ点デ連続ナルコトモ一次 operator ノ場合ト同様ニ示サレル

(以上)