2. (1, 1, ⋯, 1)型有限Abel群ノsubgroupノ相互関係 (I)

(阪大) 木下佳壽

(9月27日受付)

必要ガアツテ有限Abel群ノsubgroup及ソノ相互ノ関係ニツイテ考ヘタノデ之ヲ書キマス。

ココテハAbel群ノorderガp^nデ(1, 1, ⋯, 1)型ノ場合ヲ記シマス. コレハ一般ノ型ノ場合ノ基礎トナリマス。コノトキorder p^{n-1},　　　ノ数ハ

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-2}(p^n-p^i)}{\prod_{i=0}^{n-2}(p^{n-1}-p^i)} = p^{n-2}+p^{n-2}+\cdots\cdots+R+1$$

デスガ之ヲ始ノAbel群$\mathfrak{G}$ノBaseデ書ケバ次ノ様ニナル。

~~除~~ $\mathfrak{G}$ノ一組ノBase $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ヲ取リ之ヲ基ニシテ考ヘル時 $b_1^{x_1} b_2^{x_2} \cdots b_n^{x_n}$ $(x_1 \not\equiv 0 \ (p))$ デ生成サレル巡回群ヲSpeltenvektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ デ表ハシ互ニ独立ナ二組ノBase

$(b_1^{x_1^{(1)}}, b_2^{x_2^{(1)}}, \cdots b_n^{x_n^{(1)}})$ 及 $(b_1^{x_1^{(2)}}, b_2^{x_2^{(2)}}, \cdots b_n^{x_n^{(2)}})$ デ生成サレルAbel群ヲ $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \end{bmatrix}$ デ表ハシ以下同様ニ $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(i)} \\ x_2^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x_2^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(i)} \end{bmatrix}$ ヲ定義スル。コノ(n, i)型ノ行列ニツキ次ノ性質ヲ假定スル。

(A) pヲmodulusトスル有理整数ノElementヲモツi次ノ行列デdeterminant $\not\equiv 0 \ (p)$ ノモノヲ右乗ジテモコノ行列ハ変ラナイ。

特別ノ場合トシテ

(イ) 同一列ノElement全部ニmod pデ0トincongruentナ有理整数ノカケテモ行列ハ変ラナイ。

(ロ) オl列ニ$k(\not\equiv 0)$ヲ掛ケテオm列ニ加ヘテモ行列ハ変ラナイ。

(ハ) オl列トオm列トヲ交換シテモ行列ハ不変。

之等ノ性質ヲ假定スルノハ determinant $\neq 0$ (p) ナル i 次ノ行列ヲ右乗スレバ (n, i) 型ノ行列デ表ハサレルAbel群ノAutomorphismヲ與ヘルノダカラ當然デアル。

(B). (n, i)型ノ行列デハ $n > i$, rank $= i$.
之ハ p^n次ノAbel群デi個ノ独立ナElementヲトッテBaseトシタノダカラ當然デアル。

コノ(A), (B)ノ假定ノ下ニ p^{n-1}次ノ互ニ相異ルsubgroup (即(n, i)型ノ行列ノ中(A)ノ意味デ異ルモノ)ヲ見出ス。

Satz 1. p^{n-1}次ノsubgroupハ次ノ$e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ノ何レカノ形ノ行列デ表ハサレルgroupデアリ之等ノ$p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1$個ノ行列(デ表ハサレル群)ハ互ニ(A)ノ意味デ相異ル。即E_iヲi次ノ単位行列トスル時

$$\left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right]$$

λ_jハ mod p ノ有理整数 悉クハ 0 ナラズトス) ノ形ノp^i個ノ行列ヲe_i $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$トスル。

時ニ

$$\left(e_0 = \begin{bmatrix} 0, 0 \cdots\cdots 0 \\ E_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad e_{n-1} = \begin{bmatrix} E_{n-1} \\ \hline \lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

之ヲ証スルニ二ツノ階段ニ分ケル。即p^{n-1}次ノ部分群ノ行列ヲG_{n-1}トカク時

(1) G_{n-1}ハ$e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ノ何レカノ形デアリ，逆ニ，$e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ノ形ノ行列ハ$G_{n-1}$ノ一ツノ行列デアル

(2) e_iノ形ノ行列ノ間ニハ同ジモノナクe_iトe_k $(i \neq k)$ノ形ノ行列ノ間ニモ同ジモノナシ。同ジトハ(A)ノ意味ニ於テ。

(証) (1)ノ証。逆ノ方ハスベテノλ_jガ0－congruentナコトヨリイ(行列ノrangeガ$n-1$トナル)ヨリ明示ス。G_{n-1}デ(以下mod pヲ書ク事ヲ省略)$x_1^{(i)}$ノ

ガノ≢0ナモ[illegible]トナイ時トニ分ケテ考フ。

(a) スベテノ $x_1^{(j)}\not\equiv 0$ ノトキ：G_{n-1} デ才一行ハ皆 $\equiv 0$ デ G_{n-1} ノ rang ハ $n-1$ ((B)) ダカラ $x_2^{(j)}$ $(j=1,\cdots,n-1)$ ノ中 $\not\equiv 0$ ナモノガアル。コノ内 j ノ最小ヲ k トシテ $y_2^{(K)}x_2^{(K)}\equiv 1$ ナル $y_2^{(K)}$ ヲトリ 才K列ガ $y_2^{(K)}x_l^{(K)}$ $(l=2,\cdots,n)$ ナル行列ヲ考ヘレバ (A) ノ (イ) ニヨリ

$$G_{n-1}=\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad \text{才K列} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & y_2^{(K)}x_3^{(K)} & \cdots & * & * \\ & \cdots & & y_2^{(K)}x_4^{(K)} & \cdots & & \\ * & & & \vdots & & & * \\ & & & y_2^{(K)}x_n^{(K)} & & & \end{bmatrix}\end{array}$$

＊ノ部分ハ mod p ノアル rational integer ヲ示ス

次ニ才K列ニ $-x_2^{(K+1)}, -x_2^{(K+2)},\cdots\cdots,-x_2^{(n-1)}$ ヲ乗ジテ順次才K+1列, 才K+2列, ⋯, 才 $n-1$ 列ニ加ヘテ[(A)ノ(ロ)]後才一列ト才K列ヲ交換シテ[(A)ノ(Aハ)]

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \overline{x}_3^{(1)} & \overline{x}_3^{(2)} & \cdots\cdots & \overline{x}_3^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & & \\ \overline{x}_n^{(1)} & \overline{x}_n^{(2)} & \cdots\cdots & \overline{x}_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

次ニ rang ガ $n-1$ ダカラ才3行ニ才一列以外デ $\not\equiv 0$ ナモノガアル。之ヲ $\overline{x}_3^{(l)}$ トス (l ハ此ノ如キ番号ノ最小ノヲトル。$l\neq 1$) $y_3^{(l)}\overline{x}_3^{(l)}\equiv 1$ ナル $y_3^{(l)}$ ヲトリ才 l 列ヲ $y_3^{(l)}$ 倍シテ得タ行列デ, 才 l 列ニ $-\overline{x}_3^{(1)}, -\overline{x}_3^{(l+1)}, -\overline{x}_3^{(l+2)},\cdots,-\overline{x}_3^{(n-1)}$ ヲ乗ジテ才一列, 才 $l+1$ 列, ⋯, 才 $(n-1)$ 列ニ加ヘ才2列ト才 l 列ト交換シテ

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ * & * & & \cdots\cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix}$$

＊ハ上述ト同ジ

行列 G_{n-1} ノ rang ガ $n-1$ ダカラ才3行以下ノ各行デ必ズ上記如キ $\not\equiv 0$ ナ Element ガアル(才 i 行デハ $x_i^{(m)}\not\equiv 0$ $m\geq i$ [illegible]テ、コノ手順ガ才4行以下ニ繰返サ

シテ逆ニ

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ & E_{n-1} \end{bmatrix}$$

トナル。

(b) アル $x_1^{(j)} \neq 0$ ナトキ コノ j ノ中デ最小ノ番號 k ヲトリ $y_1^{(k)} x_1^{(k)} = 1$ ナル $y_1^{(k)}$ ヲトリ第1列ヲ $y_1^{(k)}$ 倍シ [(A) ノ (イ)] 後第 k 列ノ $-x_1^{(k)}$ 倍, $-x_1^{(k+1)}$ 倍, …, $-x_1^{(n-1)}$ 倍ヲ第 $k+1$ 列, 第 $k+2$ 列 … 第 $(n-1)$ 列ニ加ヘ [(A) ノ (ロ)] 後第1列ト第 k 列ト交換 ((A) (ハ)) スレバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots & x_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$ 第2行以下ノ Element ハ更新ニ得ル

(b1) 次ニ第2列以下ノ element ノスベテガ第2行デ $\neq 0$ ナル時ハ rang ガ $n-1$ ノタメ第3行ニ於ノ第2列以下ノ Element ノ中 $\neq 0$ ナルモノガアリ之ニツイテ (a) ト同様ノ手順ヲ施セバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix}$$

rang $= n-1$ ナル之ニコノ時第3行 … $x_3^{(m)} \neq 0$, 適當ニ1 セシ x_i ガ決ノ各行ヲ前ト同様ノ手順ヲ施セバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & E_{n-2} & & \end{bmatrix} \in \mathfrak{l}_1$$

(b2) 第2列以下ノ element ノ中第2行デ $\neq 0$ ナモノガアレバ (a) ノ場合ト同様ノ手順ニヨリ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & \cdots & x_3^{(n-1)} \\ & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

コノ時第3行ニツキ第3列以下デ非0ナモノヲ探ス。モシ第3列以下デスベテノ element ≡0ナラバ(b1)ト

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ \lambda_1\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & E_{n-3} \end{bmatrix} \in \ell_2$$

モシ第3列以下デ非0ナモノガアレバ(a)ト同様ノ手順デ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix}$$ (*ノ意味ハ前ト同じ)

第4行以下デ同様ノ手順ヲ行フ。第k行デ第k列以下(即列ノ番号>kナル列)ニ非0ナルモノガ存在スルコトガコノ手順デ$k=1,\ldots,h$マデ起リ第$h+1$行デ始メテ第$h+1$列以下ニ非0ナルモノガナイ時ハ第$h+1$行デ(b1)ノ手順ヲ行ヘバ以下ノ行デ(a)ノ手順ノミガ起ルコトガ rang $n-1$ナルコトヨリ分ル。従テコノ場合ハ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} E_h & 0 \\ \hline \lambda_1 \cdots \lambda_h & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-h} \end{bmatrix} \in \ell_h$$

デアル。即以上デG_{n-1}ハ$\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$ノ何レカノ形デアルコトガ分ル。

(2) ℓ_iハ$\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ノ各ニ$p$ヲ modulus トスル$p$個ノ値ヲ代入スルコトニヨリ$p^i$個ノ行列ヲ含ムガ之等ハ互ニ相異ル group ヲ表ハス。今

$$\begin{bmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ \mu_1 \cdots & \\ 0 & E_{n-1-i} \end{bmatrix}$$ ハ（λ, μ ハ 何レモ mod p）

ナリトスレバ(A)ヨリ p ヲ法トスル有理整数 a ヲ element トスル determinant $\not\equiv 0$ ノ行列 (a_{ik}) ガ存在シテ

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ - & - & - \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \mu_1 \cdots \mu_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix}$$

デアル。サテ

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ - & - & - \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1\,n-1} \\ & & \\ a_{i1} & & a_{i\,n-1} \\ b_1 & & b_{n-1} \\ a_{i+1\,1} & & a_{i+1\,n-1} \\ a_{n-1\,1} & & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}$$

コヽニ $b_l = \sum_{k=1}^{i} a_{kl} \lambda_k$

$(l = 1, 2, \cdots, n-1)$

従テ $a_{lm} \equiv \begin{cases} 1 & (l = m) \\ 0 & (l \neq m) \end{cases} \quad (l, m = 1, 2, \cdots, n-1)$

$\therefore \quad b_l \equiv \begin{cases} 0 & (l \geqq i+1) \\ \lambda_l & (l < i+1) \end{cases}$

即之ヨリ上ノ行列ノ右辺ヲ比較シテ $\lambda_l = \mu_l \ (l \leqq i+1)$

次ニ $\mathfrak{l}_i$ ト $\mathfrak{l}_k$ $(i \neq k)$ ノ間ニ同じモノガアレバ $i > k$ トスル時（一般性ヲ失ハズ）

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \mathfrak{l}_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ - & - & - \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ \mu_1 \cdots \mu_k & 0 \\ 0 & E_{n-1-k} \end{pmatrix}$$

即之ヨリ次ノ式ヲ得ル

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ 第i{+}1列 \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & & a_{1\,n-1} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & & a_{i\,n-1} \\
b_1 & \cdots\ b_i & \cdots & b_{n-1} \\
a_{i+1\,1} & \cdots & & a_{i+1\,n-1} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{n-1\,1} & \cdots & & a_{n-1\,n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ 第i{+}1列 \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 1 & & 0 & \\
\lambda_1 & \cdots & \lambda_k & & 0 & \\
 & & & 1 & & \\
0 & \cdots & & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} k行 \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n{-}1{-}k\,行
\end{array}
$$

（第 i 列）

両辺デ第 $(i+1, i)$ elementヲ比較シテ

$$b_i = 1$$

一方デ

$$b_i = \sum_{k=1}^{i} a_{ki}\lambda_k \equiv 0 \qquad (\because トヨリ\ a_{ki} \equiv 0,\ k \leqq i)$$

之ハ矛盾デアル。

(Satz 1 証終)

今一般ニ $(1,1,\cdots,1)$ 型ノ p^x 次ノAbel群デ p^{x-r} 次ノ部分群ノ行列ノ形ガ分ツタトシテ之等ノ行列ヲ一括シテ ${}_{x,\,x-r}\ell$ トカケバ p^n 次ノ $(1,1,\cdots,1)$ 型ノAbel群デ p^{n-r} 次ノ部分群ハ次ノSatz 2ニヨリ行列ノ形ガ分ル

Satz 2; p^n 次ノ $(1,1,\cdots,1)$ 型Abel群デ p^{n-r+1} 次ノ部分群ノ形ガ（任意ノ與ヘラレタ n ニツイテ）既ニ分ツタトスレバ p^{n-r} 次ノ部分群ノ形ハ次ノ何レカノ形ニナル。

$$
\left[\begin{array}{c|c}
{}_{n-1-k,\ n-r-k}\ell & 0 \\
\hline
\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-r-k} & 0 \\
\hline
0 & E_k
\end{array}\right]
$$

$(k=0,1,\cdots,n-r)$
λ ハ mod p ノ有理整数
${}_{x,x}\ell = E_x$ トス

（$k=0$ ノトキ E_k ノ行ハ消失シ $k=n-r$ ノ時 ℓ ノ行ハ消失スルモノトスル）

部分群ノ作ルlatticeノdiagramヲ考ヘルノニハ $r=1$ ノ時（Satz 1ノ時）ヲ考ヘテツギタセバヨイ。從テ今，p^{n-1} 次ノ部分群ト p^{n-2} 次ノ部分群トノ間ノ包含関係ヲ調ベルノニSatz 1ヲ利用スル。（以下次回）