1202

表現的見地カラ

高野一夫 (浦和)

(1月16日受付)

§0. 数年前ニ J. Haantjes 氏ハ氏ノ把握スル道ノ幾何学ニ関スル考究ノ結果ヲ論文トシタ。(1) ソノ論法ハ真ニ巧デアツテ、吾々ノ感嘆スルトコロデアルケレドモ、ソノ中カラ少シ許リノ論究ヲ拉チシ去リ、モウ一歩フミ込ンデ表現的ナ考察ヲメグラシテミタイト思フ。勿論ソノ結果ハ新シイモノデハナイケレドモ、カヤウナ方法デモ解釈ガ更新サレル点ヲ御判読サレンコトヲ。

§1. Haantjes ハ先ヅ $\lambda, \mu, \cdots\cdots = 0, 1, \cdots\cdots n$ ナル添数ヲ用ヒテ n 次元集合体ノ中デ x^{λ} ナル斉次座標ヲ導入シ且、之ニ対シテ

$$(1.1) \qquad x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(x^{\mu})$$

ト云フ変換ノ集合ヲ添ヘ，$x^{\lambda'}$ ハ x^{μ} ニ関スル1次ノ斉次解析函数トシ、ソノヤコビアンハ考ヘテヰル点ニ於テハ0デハナイモノトシテヰル。

カヤウナ斉次座標ヲモツテヰル n 次元集合体ノコトヲ彼ハ<u>一般化サレタ射影空間</u> ト呼ヒ H_n デ表ハシテヰル。

トコロデ彼ハ又次ノヤウナ制限ヲ与ヘテヰル。即チ射影接続係数ヲ $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ デ表ハストキ、吾々ノ集合体ハ次ノ條件ヲ満足スルモノトスルノデアル。

(1.2) $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\nu\mu},\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\,x^{\mu}=0.\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}x^{\omega}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}=0$

コヽデ　コンマ　ハx^{ω}ニ関スル普通ノ偏微分ヲ表ハスコトニスル。

彼ハ　パスノ方程式トシテ

(1.3) $$\frac{d^2x^{\lambda}}{dt^2}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}=\alpha x^{\lambda}+\beta\frac{dx^{\lambda}}{dt}$$

ヲトツテヰル。吾々ハ之ヲ解カウ。サウシテソレラヲ

$$x^{\lambda}=x^{\lambda}(t)$$

デ表ハシテ、$t=u^1/u^0$トオケバ、カウシテ吾々ハパスノ別ノ表現

(1.4) $$x^{\lambda}=x^{\lambda}(u^0,u^1)$$

ヲ得ル。

勿論 $x^{\lambda}(u^0,u^1)\equiv x^{\lambda}(u^a)$, $(a=0,1)$ ハ1次ノ斉次函数ト考ヘネバイケナイノデ、u^aト入u^aトハ世線上ノ同ジ点ヲ表ハシテヰル。

次ニ　u^a　ナル斉次媒介変数ノ変換ハト云ヘバ、ソレハ

(1.5) $$u^{a'}=u^{a'}(u^a)$$

ナル関係デアリ、1次ノ斉次函数デアル。

カヤウナ考ヘカラ、オイラーノ斉次函数定理ニ従ツテ

(1.6) $$x^{\lambda}=B^{\lambda}_{a}u^a,\quad B^{\lambda}_{a}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^a}$$

(1.7) $$u^{a'}=B^{a'}_{a}u^a,\quad B^{a'}_{a}=\frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a}$$

トナリ、且又

$$\frac{dx^\lambda}{dt}=B_a^\lambda\frac{du^a}{dt}$$

デアルカラ吾々ハ次ノ関係ヲ得ル。

$$(1.8)\qquad B_a^\lambda=p_a\frac{dx^\lambda}{dt}+q_a x^\lambda$$

(1.8) ト (1.6) カラ

$$(1.9)\qquad \frac{dx^\lambda}{dt}=\eta^a B_a^\lambda、\quad x^\lambda=u^a B_a^\lambda$$

(1.3) ヲ考ヘ乍テ，(1.8) ヲ共変微分スレバ

$B_c^\mu\nabla_\mu B_a^\lambda$ ハ x^λ ト $\frac{dx^\lambda}{dt}$ ノ一次結合デアリ従ツテ、

(1.9) ニ依ツテ B_a^λ ト B_b^λ トノ一次表示トナル。

ダカラ、カヤウニシテパスノ方程式ハ

$$(1.10)\qquad B_c^\mu\nabla_\mu B_b^\lambda=\partial_c B_b^\lambda+\Pi_{\mu\nu}^\lambda B_{cb}^{\mu\nu}=\Gamma_{cb}^a B_a^\lambda$$

ト変ズル。両辺ヲ比ベルト Γ_{cb}^a ハ u^a ノ一ノ次ノ函数ナルコトガ判リシカモ u^a ヲ (1.5) デ変換スルト，Γ_{cb}^a ハ

$$(1.11)\qquad \Gamma_{c'b'}^{a'}=B_{a\,c'\,b'}^{a'\,c\,b}\Gamma_{cb}^a+B_a^{a'}\partial_{c'}B_{b'}^a,$$

$$(B_{a\,c'\,b'}^{a'\,c\,b}=B_a^{a'}B_{c'}^c B_{b'}^b)$$

ナル変換ヲ受ケルコトモ判ル。

従ツテ、Γ_{cb}^a ハ H_n ニ於ケル射影接続係数ト考ヘテヨイ訳デアル。

§2. 以上ハ Haantjes ノ論述ソノマヽデアルケレドモ、コノ H_n ト云フ空間ヲ別ノ方向カラ眺メテ，考究シテミヨウ。幸ニモ吾々ハソレヲ指示スル論文ヲモツテキル，(2)

結論ヲ述ベレバ

> H_n トハ実ハ $n+1$ 次ノ特殊ナ擬似接続空間 A_{n+1} ニ於テ与ヘラレルニ他ナラナイ。

ノデアル。

如何ニモ、$\lambda, \mu, \cdots = 0, 1, \cdots, n$ ニトリ、x^λ ヲ以テ $n+1$ 次元擬似接続空間 A_{n+1} ノ任意ノ一点ノ座標ヲ表ハスモノトシテ、コノ空間ニ反変ベクトル場 ξ^λ ヲ与ヘ接続係数ヲ $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ デ表ハス。

ソシテ、A_{n+1} ニ於テ次ノ特性ヲ与ヘル。

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\nu\mu}, \\ \text{(ii)} & \xi^\lambda_{;\mu} = \delta^\lambda_\mu, \\ \text{(iii)} & \Pi^\lambda_{\mu\nu\omega}\xi^\omega = 0 \end{cases}$$

コヽデ セミコロン ハ共変微分ヲ表ハス。ソシテ

$$(2.2)\quad \Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} = \Pi^\lambda_{\mu\nu,\omega} - \Pi^\lambda_{\mu\omega,\nu} + \Pi^\alpha_{\mu\nu}\Pi^\lambda_{\alpha\omega} - \Pi^\alpha_{\mu\omega}\Pi^\lambda_{\alpha\nu}$$

ソレデ吾々ハ特別ナ座標系ヲエランデ

$$(2.3)\quad \xi^\lambda = x^\lambda$$

トスル。コノ関係ヲソノママニスルタメニハ x^λ ハ 1 次ノ斉次函数デナケレバナラヌコトハ見易イ。

カヤウナ A_{n+1} ハ実ハ §1 ニ於テ考ヘタ H_n ノ一ツノ表示デアル。

実際 (2.1) ノ (i) カラ

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\nu\mu},$$

(ii) カラ $\dfrac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu = \delta^\lambda_\mu$, $\therefore \Pi^\lambda_{\mu\nu}x^\mu = 0$

之ハ云フマデモナク（1.2）ノ第二式デアル。

(2.1) ノ (iii) カラ

$$\Pi^{\wedge}_{\mu\nu\omega}\, x^{\omega} = 0$$

(2.2) ヘ x^{ω} ヲ乗ジテ $\Pi^{\wedge}_{\mu\nu}\, x^{\mu} = 0$ ヲ使フト

$$\Pi^{\wedge}_{\mu\nu,\omega}\, x^{\omega} = -\Pi^{\wedge}_{\mu\nu},$$

之ハ（1.2）ノ第三式デアル。

カウシテ吾々ハ $n+1$ 次元ノ擬似接続集合体 A_{n+1} ニ(2.1)ト(2.3)ヲ附帯サセルト，ソレガ H_n ノ別ナ表ハシ方ニナルコトガ判ツタ訳デアル，

ソレデ §1 デ考ヘタパス $x^{\lambda} = x^{\lambda}(u^{\alpha})$ ヲカヤウナ A_{n+1} ノ中ノパスト考ヘテ次ノヤウニ推論スル。

Haantjes ハ u-曲面ヲ以テパスヲ表サントシテ居ル、換言スレバ (2.1), (2.3) ヲモツタ A_{n+1} ノ中デパス系ガ与ヘラレテ居テ、之ニ2次元曲面 (u^{1}, u^{2}) ガ附随シテヰルノデアル。

シカラバサウ云フ u-平面ハ如何ナルモノデアラウカ？
之ガ幾何学的ニ、Haantjes ノパスヲ説明スル鍵デハナカラウカ？

吾々ハ以下之ニツイテ考ヘテミヤウ。

§3.

コノ曲面ハ H_n 即チ (2.1), (2.3) ヲモツ A_{n+1} ノ部分空間デアル。ソシテ §1デ考ヘタヤウニ Γ^{a}_{cb} ナル係数ヲモツテ井テ 丁度 H_1 ニ於ケル射影接続ノ係数ノヤウニ変リシ

カモ (1.10)カラ

$$H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} \equiv \partial_c B_b^{\varkappa} + \Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa} B_{cb}^{\mu\lambda} - \Gamma_{cb}^{a} B_a^{\varkappa} = 0$$

ヲ得ル。之ハリーマン幾何学デ云フ オイテースカウテン ノ曲率テンソル ニ相当スル $H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa}$ ガ 0 ト云フコトデアル。云ヒカヘレバ、吾々ノ曲面ハ 全測地曲面ナノデアル。

Haantjes ガ パス ヲ u-parameter デ表ハシタコトハ、パス ヲ全測地曲面デ表現シヨウトイフ下心ガアッタ為カモ知レナイ，事実 Dantzig ノ論文ヲ見ルト[3] パスヲ partial 方程式ニトリ．$H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} = 0$ デ表ハシテ居ル。

サテ、ソレハサテ置キ

$$\xi^{\lambda} = x^{\lambda} = B_a^{\lambda} u^a$$

ダカラ、之ヲ u^b ニツキ共変微分スルト

$$(3.1)\quad \xi_{;\mu}^{\lambda} B_b^{\mu} = H_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} u^a + B_a^{\lambda} u_{;b}^{a} = B_a^{\lambda} u_{;b}^{a}$$

モウ一度之ヲ u^c デ共変微分シテ．

$$(3.2)\quad \xi_{;\mu;\nu}^{\lambda} B_b^{\mu} B_c^{\nu} = B_a^{\lambda} u_{;b;c}^{a}$$

ダカラ

$$(3.3)\quad u_{;b;c}^{a} = B_{\lambda\,bc}^{a\,\mu\nu} \xi_{;\mu;\nu}^{\lambda},$$

コヽデ Gauss ノ方程式ヲ想ヒ出セバ

$$\Pi_{bcd}^{a} = B_{\lambda\,bc}^{a\,\mu\nu} B_d^{\omega} \Pi_{\mu\nu\omega}^{\lambda} - H_{bc}^{\cdot\cdot\varkappa} L_{(\varkappa)d}^{a} + H_{bd}^{\cdot\cdot\varkappa} L_{(\varkappa)c}^{a} = B_{\lambda\,bc}^{a\,\mu\nu} B_d^{\omega} \Pi_{\mu\nu\omega}^{\lambda},$$

カクシテ

$$U^{a}_{;b;c} + \Pi^{a}_{bcd} U^{d} = B^{a\mu\nu}_{\lambda bc}\left(\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu\omega}\xi^{\omega}\right)$$
$$= 0$$

又 (3.1) カラ $U^{a}_{;b} = \delta^{a}_{b}$

コレラニツノ結果ノ云フトコロハ吾々ノ曲面ガ U^{a} ノ方向ニ擬似相稱ヲ許容スルトイフコトデアル。

シカモ亦 $\Pi^{a}_{bcd} U^{d} = 0$

之カラ Haantjes ガヤツテヰルヤウニ 非幾何學的ニ (代数的ニ)

$$\Pi^{a}_{bcd} = 0$$

トナル。

カウシテ、トモ角モ、Haantjes ガ パス ト呼ビ論及シテヰルトコロハ、更ニハツキリト、幾何學的ニ述ベ換ヘラレヨウト云フモノデアル。

即チ Haantjes ノパス トハ A_{n+1} ト云フ擬似接続空間ニ特殊性ヲ与ヘタ空間デ考ヘテミルト、全測地曲面デアル上ニ擬似相称ヲ許容シ、平坦デアル。

ト云フノデアル。

文中ノ肩ニシルシタ (1), (2), (3) ハ次ノ論文ヲ示ス。

(1) J. Haantjes : On the projective geometry of paths, proc. Edinburgh Math. Soc. 5 (1937), 103—115.

(2) K. Yano : Les espaces à connexion projective et la géométrie des paths.

Thèse. Paris. (1938).

(3) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. Math. Annalen. Band 106. (1932).

—冬至近ク— 1944 —