[1199] Bernoulli数の漸化式

伊関兼四郎（ 東大 ）

（12月4日受付）

$$\frac{1}{2}z\cot\frac{1}{2}z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < 2\pi)$$

デ定義サレルBernoulli 数 B_n ハ種々ノ漸化式ヲ満足スル事ガ知ラレテヰルガ、筆者ハ最近一ツノ新シイ漸化式ヲ得タノデ、次ニ之ヲ述ベテ見タイ。

［定義］ $n \geqq 1$. $1 \leqq m \leqq n$ ナル時 $2\mu-1$ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ ノ中カラ m 個ノ奇数ノ組合セ（重複ヲ許サズ、順序ヲ考ヘナイ）ヲ作ツテ之等ヲ掛合セタ積ノ総和ヲ $S^{(m)}_{2n+1}$ デ表ス。$n \geqq 2$, $1 \leqq m \leqq n-1$ ナル時 2μ $(1 \leqq \mu \leqq n-1)$ ノ中カラ同様ニ m 個ノ偶数ノ組合セヲ作ツテ之等ヲ掛合セタ積ノ総和ヲ $S^{(m)}_{2n}$ デ表ス。更ニ

$$S^{(0)}_{2n+1} = 1 \ (n \geqq 0), \quad S^{(0)}_{2n} = 1 \ (n \geqq 1)$$

ト約束スル。

［定理］ Bernoulli数ニ対シテ次ノ漸化式ガ成立スル：

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{k}{\nu}(2^{2\nu}-2)B_\nu S^{(k-\nu)}_{2k-1} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-)^{\nu+1}}{2\nu+1} S^{(k-\nu)}_{2k} \quad (k \geqq 1)$$

次ニ次第ニ此ノ定理ヲ証明シテ行ク事ニスル.

［補題 1］

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sin \zeta z}{\sin^{2n+2} z}\,dz = \frac{S^{(n)}_{2n+2}}{(2n+1)!}\,\zeta \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1 - \frac{\zeta^2}{(2\nu)^2}\right\} \quad (n \geqq 0)$$

但シ左辺ノ積分ノ路ハ原点ヲ中心トシ R $(0 < R < \pi)$ ヲ半径トスル円周ヲ正ノ向キニ一周スル。更ニ空虚ナ積ハ1ニ等

シイモノトスル。

【証明】 $n=0$ ノ場合ハ明ラカデアルカラ $n \geqq 1$ トスル。

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\sin sz}{\sin^{2n+2}z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{\sin^{2n+2}z}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-)^{\nu}}{(2\nu+1)!}(sz)^{2\nu+1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-)^{\nu}s^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\int\frac{z^{2\nu+1}dz}{\sin^{2n+2}z}$$

デアルカラ問題ノ式ノ左辺ハ s ノ高々 $2n+1$ 次ノ多項式デアル。之ヲ $f(s)$ トスレバ $f(0)=0$ 而シテ

$$\sin 2\nu z=\sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{2\nu}{2\mu-1}(-)^{\nu-\mu}\cos^{2\mu-1}z\sin^{2\nu-2\mu+1}z$$
$$(1\leqq\nu\leqq n)$$

デアルカラ $f(2\nu)=f(-2\nu)=0 \quad (1\leqq\nu\leqq n)$

故ニ $f(s)=Cs\prod_{\nu=1}^{n}\left\{1-\frac{s^2}{(2\nu)^2}\right\}$ ト置ケバ C ハ常数デアル。

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\sin sz}{s}\,\frac{dz}{\sin^{2n+2}z}=C\prod_{\nu=1}^{n}\left\{1-\frac{s^2}{(2\nu)^2}\right\}$$

ニ於テ $s=0$ ト置ケバ

$$C=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z}=\frac{S_{2n+2}^{(n)}}{(2n+1)!}$$

ナル事ハ容易ニ知ラレル。

【補題2】

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z^{2m-1}dz}{\sin^{2n}z}=\frac{(2m-1)!}{(2n-1)!}S_{2n}^{(n-m)} \qquad (n\geqq m\geqq 1)$$

【証明】 補題1ノ両辺ニ於テ $s^{2\nu+1}$ $(0\leqq\nu\leqq n)$ ノ係数ヲ比較スレバ

$$\frac{(-)^{\nu}}{(2\nu+1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z^{2\nu+1}dz}{\sin^{2n+2}z}=\frac{(-)^{\nu}}{(2n+1)!}S_{2n+2}^{(n-\nu)}$$

【補題3】

$$\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-)^{\nu}}{2\nu+3}S_{2k+2}^{(k-\nu)}=\frac{(2k+2)!}{2k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{z^2\sin^{2k+1}z} \quad (k\geqq 0)$$

〔証明〕 $\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-)^{\nu}}{2\nu+5}S_{2k+2}^{(k-\nu)}=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-)^{\nu}}{2\nu+3}\frac{(2k+1)!}{(2\nu+1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z^{2\nu+1}dz}{\sin^{2k+2}z}$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(2k+1)!}{2\pi i}\frac{(-)^{\nu}(2\nu+2)}{(2\nu+3)!}\int\frac{z^{2\nu+1}dz}{\sin^{2k+2}z}=\frac{(2k+1)!}{2\pi i}\int\frac{dz}{\sin^{2k+2}z}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z}\right)=\frac{(2k+2)!}{2k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{z^2\sin^{2k+1}z}$$

〔補題4〕

有理整数 $k\geqq 0$、実数 $m>2k$ ニ対シテ

$$\int_0^\infty\frac{x^m dx}{\sinh^{2k+1}x}=\frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!}\sum_{\nu=0}^{k}(-)^{k-\nu}\eta(m+1-2\nu)S_{2k+1}^{(k-\nu)}$$

但シ $\eta(s)=(1-2^{-s})\zeta(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)^{-s}\qquad(s>1)$

デ $\zeta(s)$ ハ Riemann ノ ζ 函数デアル.

〔証明〕 $\int_0^\infty\frac{x^m dx}{\sinh^{2k+1}x}=\int_0^\infty x^m dx\left\{2^{2k+1}e^{-(2k+1)x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-2k-1}{\nu}\right.$

$$\left.(-e^{-2x})^{\nu}\right\}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(2k+\nu)!}{(2k)!\,\nu!}\int_0^\infty x^m e^{-(2k+1+2\nu)x}dx$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(2k+\nu)!}{(2k)!\,\nu!}\frac{\Gamma(m+1)}{(2k+1+2\nu)^{m+1}}$$

然ルニ

$$\frac{(2k+\nu)!}{\nu!}=2^{-2k}\prod_{\mu=1}^{k}\{(2k+1+2\nu)^2-(2\mu-1)^2\}$$

$$=2^{-2k}\sum_{\mu=0}^{k}(2k+1+2\nu)^{2k-2\mu}(-)^{\mu}S_{2k+1}^{(\mu)}$$

デアルカラ

$$\int_0^\infty\frac{x^m dx}{\sinh^{2k+1}x}=\frac{2^{2k+1}\Gamma(m+1)}{(2k)!}\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-2k}\sum_{\mu=0}^{k}(2k+1+2\nu)^{2\mu}(-)^{k-\mu}\frac{S_{2k+1}^{(k-\mu)}}{(2k+1+2\nu)^{m+1}}$$

$$= \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} (2k+1+2\nu)^{2\mu-m-1} S_{2k+1}^{(k-\mu)} (-)^{k-\mu}$$

$$= \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+2\nu)^{2\mu-m-1} S_{2k+1}^{(k-\mu)} (-)^{k-\mu}$$

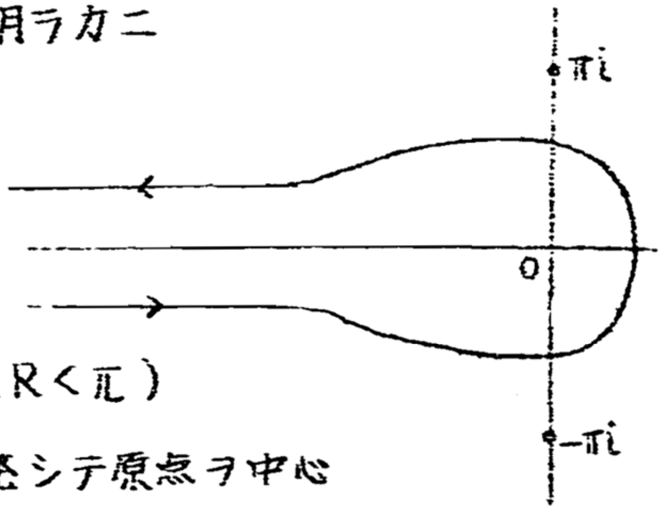
$$= \frac{2\Gamma(m+1)}{(2k)!} \sum_{\mu=0}^{k} (-)^{k-\mu} \eta(m+1-2\nu) S_{2k+1}^{(k-\mu)}$$

【補題5】　有理整数$k \geqq 0$，複素数mニ對シテ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{z^m dz}{\sinh^{2k+1} z} = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{2(-)^{k+1+\nu} S_{2k+1}^{(k-\nu)}}{(2k)!\,\Gamma(-m)} \eta(m+1-2\nu).$$

但シ左辺ノ積分ノ路ハ$-\infty$カラ出発シテ原点ヲ正ノ向キニ一周シ再ビ$-\infty$ニ戻ル曲線デ、積分函数ノ極$n\pi i$（nハ有理整数）ヲ通ラナイモノトスル。更ニ積分路上デ$|\arg z| \leqq \pi$トスル。

【証明】　上式ノ左辺ハ明ラカニmノ整函数デアル。今$m > 2k$トスレバ右図ノ積分路ヲ変形シテ$-\infty$カラ$-R$（$0<R<\pi$）ニ至ル直線　$-R$カラ出発シテ原点ヲ中心トシテ原点ノ周囲ヲ正ノ向キニ一周シ再ビ$-R$ニ戻ル円周、$-R$カラ$-\infty$ニ至ル直線ノ三部分ニ分ケル時、原点ノ周リノ積分ハ$R \to 0$ナル時消失スルカラ



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{z^m dz}{\sinh^{2k+1} z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{-(xe^{-\pi i})^m}{\sinh^{2k+1} x} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty}$$

$$\frac{(xe^{\pi i})^m}{\sinh^{2k+1} x} dx$$

$$= \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^m dx}{\sinh^{2k+1} x} = \frac{2\Gamma(m+1)}{\pi(2k)!} \sin m\pi \sum_{\mu=0}^{k}$$

$$(-)^{k-\mu} \eta(m+1-2\mu) S_{2k+1}^{(k-\mu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \frac{2(-)^{k+1-\nu} S_{2k+1}^{(k-\nu)}}{(2k)!\,\Gamma(-m)} \eta(m+1-2\nu)$$

故ニ証明スベキ式ハmノ任意ノ値ニ対シテ成立スル事ガ分ル（解析接続ノ定理）。

［補題 6］

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z^2 \sin^{2k+1} z} = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{2^{2\nu+1}-1}{(2k)!(\nu+1)} B_{\nu+1} S_{2k+1}^{(k-\nu)} \qquad (k \geqq 0)$$

［証明］ $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z^2 \sin^{2k+1} z} = \frac{(-)^{k-1}}{2\pi i} \int \frac{dz}{z^2 \sinh^{2k+1} z}$

$$= (-)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{2(-)^{k+1-\nu}}{(2k)!} \eta(-1-2\nu) S_{2k+1}^{(k-\nu)}$$

ナル事ハ補題5カラ明ラカデアル（積分路ハ初論補題1ニ於ケルト同ジデアル。）然ルニ

$$\eta(-1-2\nu) = (1-2^{2\nu+1}) \zeta(-1-2\nu) = (1-2^{2\nu+1}) \frac{(-)^{\nu+1} B_{\nu+1}}{2(\nu+1)}$$

デアルカラ補題6ガ成立スル。

［定理ノ証明］ 補題3及ビ6カラ

$$\sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-)^\nu}{2\nu+3} S_{2k+2}^{(k-\nu)} = \frac{(2k+2)!}{2k+1} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{2^{2\nu-1}-1}{(2k)!(\nu+1)} B_{\nu+1} S_{2k+1}^{(k-\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k+1}{\nu+1} (2^{2\nu+2}-2) B_{\nu+1} S_{2k+1}^{(k-\nu)} \qquad (k \geqq 0)$$

此処デ k, ν ノ代リニ, $k-1$, $\nu-1$ ト置ケバ定理ノ式ガ得ラレル。