1198 Zorn ノ補題ノ整列集合ヲ用ヰナイ證明

入　江　　盛　（北大）

（11月 20日 受付）

Zorn ノ補題ニ就イテハ位相數學第四巻第1号（50—52頁及ビ 74頁）ニ中山正氏ノ解説ガアリマス。

一年目ノ学生ニ講義スル際、整列集合ニ關シテ述ベル前ニ此ノ補題ヲ使ヒタイノデ次ノヤウニ證明シテ見マシタ。方針ハ Zermelo ノ整列可能定理ノ第2ノ證明（Math. Ann. 65.（1908））ト同様デス。

Zorn ノ補題.「半順序ノアル集合 E ヲ考ヘル、ソシテ E ノ空ナラザル部分集合デ此ノ半順序ノ関係ガ線型順序デアルヤウナモノハ常ニ E ノ中ニ supremum ヲ持ツト假定スル。（此ノ時 E ハ inductively ニ順序ヅケラレテヰルト言フ）シカルトキ E ニハ極大ナ元ガ少クトモ一ツ存在スル。」

コレハ次ノ二ツノ補題カラ直チニ得ラレル。

補題 1.「inductively ニ順序ヅケラレタ集合 E ヲ考ヘル。E ヲ E ノ中ヘ寫像スル一価函数ガ E ノ全テノ元 x ニ対シテ $f(x) \geqq x$ ヲミタスナラバ少クトモ一ツ不動元 $f(x)=x$ ガ存在スル」

補題 2「E ヲ inductively ニ順序ヅケラレタ集合トスレバ E ヲ E ノ中ヘ寫像スル一価函数デ E ノ全テノ元 x ニ

對シテ $f(x) \geqq x$ ヲミタシ．シカモ $f(x)=x$ デアルノハ x ガEノ極大元ナルトキニ限ルモノガ存在スル．」

補題２ハ選擇公理ヲ假定スレバ明カデアル。

補題１ヲ選擇公理ヲ假定セズ，又整列集合ヲ用ヰナイデ次ニ證明スル。

證明

第１段　　集合Eノ部分集合ヨリナル集合族デ次ノ條件ヲ滿足スル $\mathfrak{M}_0$ ガ存在スルコトガ證明出來レバ補題１ノ成立スルコトハ明カデアル．

(1)　$A \in \mathfrak{M}_0$ デ $sup(A)=a$ ガ存在スレバ $A\{f(a)\} \in \mathfrak{M}_0$、

(2)　全テノ $\varphi \in \Phi$ ニツキ $A_\varphi \in \mathfrak{M}_0$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} A_\varphi \in \mathfrak{M}_0$．

(3)　$\mathfrak{M}_0$ ノ任意ノ元ニ於テEニオケル半順序ノ関係ハ線型順序デアル。

實際　$\mathfrak{M}_0$ ニ屬スル全テノ元ノ和集合ヲMトスレバ、(2)及ビ(3)ヨリMハ線型デアルカラ假定ヨリ $sup(M)=\mathfrak{m}$ ガ存在スル。$f(\mathfrak{m})$ ハ (1) ヨリMニ屬シ、又假定ヨリ $f(\mathfrak{m}) \geqq \mathfrak{m}$ デアルカラ $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}$ デナケレバナラヌ。

第２段　　集合族 $\mathfrak{M}_0$ ノ存在ヲ示スタメニ Δ－連鎖ナルモノヲ定義スル。

p ヲEノキマツタ元トシ、p ヲ含ムEノ部分集合ノ族 $\mathfrak{M}$ ガ次ノ條件(0)，(1) 及ビ (2) ヲ滿足スルトキ之ヲΔ－連鎖ト名ヅケル。

(0)　$\{p\} \in \mathfrak{M}$．

(1) $A \in \mathfrak{M}$ デ $\sup(A)=a$ ガ存在スレバ $A \vee \{f(a)\} \in \mathfrak{M}$.

(2) 全テノ $\varphi \in \Phi$ ニツキ $A_\varphi \in \mathfrak{M}$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} A_\varphi \in \mathfrak{M}$.

Δ－連鎖ハ確ニ存在スル。例ヘバEノ部分集合デPヲ含ムモノ全テカラナル集合族ガサウデアル。

明カニ、全テノΔ－連鎖ノ共通部分ハΔ－連鎖デアル。之ヲ $\mathfrak{M}_0$ トスレバ $\mathfrak{M}_0$ ハΔ－連鎖ノ最小ナルモノデアル。故ニ $\mathfrak{M}_0$ ノ部分族ガΔ－連鎖ナラバソレハ $\mathfrak{M}_0$ 自身デナケレバナラナイコトニ注意シテオク。

$\mathfrak{M}_0$ ハ第1段ノ(1)及ビ(2)ヲ満足シテヰル。(3)モ満足シテヰルコトヲ示ス前ニ次ノ(4)ヲ證明スル。

第3段　(4)「$\mathfrak{M}_0$ ノ任意ノ二ツノ元ハ比較可能デアル。即チ $A, P \in \mathfrak{M}_0$ ナラバ $A \subset P$（眞部分集合）、$A=P$、$A \supset P$ ノ何レカ一ツガ必ズ成立スル。」

(4)ヲ證明スルタメニ性質αナルモノヲ考ヘル。「$P \in \mathfrak{M}_0$ ガ全テノ $A \in \mathfrak{M}_0$ ト比較可能ナルトキハPハ性質αヲ有スル」ト云フ。$\mathfrak{M}_0$ ノ元デ $\subset P$ ナルモノノ全体ヲ $\mathfrak{U}_P$、$\mathfrak{M}_0$ ノ元デ $\supset P$ ナルモノノ全体ヲ $\mathfrak{V}_P$ デアラハス。

(4)ハ $\mathfrak{M}_0$ ノ任意ノ元ガ性質αヲ有スルト云フコトデアルガソノタメニハ $\mathfrak{M}_0$ ノ元デ性質αヲ有スルモノノ全体 $\mathbb{L}$ ガΔ－連鎖デアルコトヲ言ヘバ十分デアル。

0) $\{p\} \in \mathbb{L}$ 即チ $\{p\}$ ガ性質αヲ有スルコトハ明カデアル。

1) $A \in \mathbb{L}$ デ $\sup(A)=a$ ガ存在スルトキ $A \vee \{f(a)\} \in \mathbb{L}$

ナルコト。

$A^* = A \vee \{f(a)\}$ トオケバ $A^* \supseteqq A$ デアルカラ $\mathbb{III}_A \vee \{A\} \subseteqq \mathbb{III}_{A^*} \vee \{A^*\}$. 故ニ $\mathbb{N} = \mathbb{III}_A \vee \{A\} \vee \{A^*\} \vee \mathbb{V}_{A^*}$ トオクトキ、$A^* \in \mathbb{L}$ 即チ $\mathbb{M}_0 \subseteqq \mathbb{III}_{A^*} \vee \{A^*\} \vee \mathbb{V}_{A^*}$ ヲ證明スルニハ $\mathbb{M}_0 \subseteqq \mathbb{N}$ ヲ言ハバ十分デアリ，從ツテ又$\mathbb{N}$ガ Δ- 連鎖デアルコトヲ言ヘバ十分デアル。

イ) $\{p\} \in \mathbb{N}$ ハ明カ.

ロ) $B \in \mathbb{N}$ 且 $\sup(B) = b$ ガ存在スルトキ
$B^* = B \vee \{f(b)\} \in \mathbb{N}$ ナルコト.
$B \in \mathbb{III}_A$ ナラバ $B \subset A \to B^* \not\supset A$ (假ニ $B^* \supset A$ ナラバ $B^* \supset A \supset B$ トナリ不合理) $\to B^* \subseteqq A$ (A ハ性質αヲ有スル故) $\to B^* \in \mathbb{N}$.
$B \in \{A\} \vee \{A^*\} \vee \mathbb{V}_{A^*}$ ナラバ $B^* \in \{A^*\} \vee \mathbb{V}_{A^*} \subseteqq \mathbb{N}$ ナルコトハ明カ.

ハ) 全テノ$\varphi \in \Phi$ニツキ$B_\varphi \in \mathbb{N}$ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} B_\varphi \in \mathbb{N}$ ナルコト
全テノ B_φ ガ $\mathbb{III}_A \vee \{A\}$ ノ元ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} B_\varphi \in \mathbb{III}_A \vee \{A\}$,
又或ル B_φ ガ $\{A^*\} \vee \mathbb{V}_{A^*}$ ノ元ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} B_\varphi \in \{A^*\} \vee \mathbb{V}_{A^*}$ デアルコトハ明ラカデアル。

イ) ロ)及ビハ)ハ$\mathbb{N}$ガ Δ-連鎖デアルコトヲ示シテヰル.
即チ $A \vee \{f(a)\} \in \mathbb{L}$ ナルコトガ分ツタ。

2) 全テノ $\varphi \in \Phi$ ニツキ $A_\varphi \in \mathbb{L}$ ナラバ $\bigvee_{\varphi \in \Phi} A_\varphi \in \mathbb{L}$ ナルコト。

$\bigvee_{\varphi \in \Phi} A_\varphi = B$ トオクトキ、$X \in \mathbb{M}_0$ ガ全テノ A_φ ヲ含ム

ナラバ $X \in \{B\} \vee \mathbb{V}_B$ ，又或ル $A\varphi$ ニ含マレルナラバ

$X \in \mathbb{III}_B \vee \{B\}$ デアルコトハ明カデアル。従ツテ

$\mathbb{M}_0 \subseteqq \mathbb{III}_B \vee \{B\} \vee \mathbb{V}_B$

0)， 1)及ビ2)ハ $\mathbb{L}$ ガ Δ-連鎖デアルコトヲ示シテヰル．故ニ、(4)ガ證明出来タ。

第4段　前段ノ(4)ヲ用ヰテ $\mathbb{M}_0$ ガ第1段ノ(3)ヲ満足シテヰルコトヲ證明スル。

$\mathbb{M}_0$ ノ元ノ中Eニ於ケル半順序ノ関係ガ線型順序デアルモノノ全体ヲ $\mathbb{M}_0'$ トスル。$\mathbb{M}_0'$ ニ於テ Δ-連鎖ノ條件(0)及ビ(1)ガ成立シテヰルコトハ明カ．又(4)ヲ用ヰレバ(2)ガ成立シテヰルコトモ明カデアル。故ニ $\mathbb{M}_0$ ハ $\mathbb{M}_0'$ ト一致スル。

以上第1段ヨリ第4段マデデ補題1ノ證明ガ出来タ