[1197] 四元數体ニ於ケル週期函數ノ一定理ニ就イテ

春木　博（神戸高等商船学校）

（10月30日受付）

§1. 序

四元数体ニ於テハ、乗法ノ可換律が成立シナイカラ、ソコニ於ケル Analysis ハ複素数ニ於ケル如ク円滑ニハユカヌ。モハヤ、一致ノ定理モ、四元数体ニ於テハ、成立シナイ。例ヘバ $f(q)=1+q^2$（q ハ四元数ヲアラハス）ハ、$q=li+mj+nk$（l, m, n ハ $l^2+m^2+n^2=1$ ナル関係ヲ有スル実数）ヲ零点ニ持ツ。故ニ、一致ノ定理ハ成リ立タナイ。

以下ニ於テ、特殊ナル四元数函数ニツキ、週期性ニ関スル一定理ヲ述ベヤウ。

先ヅ準備トシテ、実数デナイ任意ノ四元数 $q=d+ai+bj+ck$ が次ノ如ク書ケルコトヲ注意スル。$a^2+b^2+c^2 \neq 0$ ナル故

$$q=d+ai+bj+ck=d+\frac{ai+bj+ck}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ココデ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\alpha$, $\dfrac{ai+bj+ck}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=n(q)$ トオケバ

$$q=d+\alpha\, n(q)$$

ココデ、注意スベキハ $n(q)$ ハ

$$\boxed{n^2(q)=-1}$$

ナル性質ヲ有スル。之ハ四元数ノ底 i, j, k ノ性質ヨリ 容易ニ

証明サレル。$n(q)$ハ丁度複素数ニ於ケル虚数単位ノ如キ性質ヲ有スル。コノ性質ハ以下ノ本論ニ於テ使用スル。コノ性質ト後ニ示ス四元数ノ指数函数ノ性質ヲ用ヒレバ、任意ノ四元数qハ（複素数ノ極形式ノ如ク）$|q|e^{n(q)\theta}$ナル形式ニ書ケルガ、本論ニ関係ナイノデ、詳シクハ述ベナイ。

§2. 本 論

実係数ヲ有スル四元数qノ巾級数

$$f(q)=\alpha_0+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\cdots\cdots+\alpha_n q^n+\cdots\cdots$$

ヲ考ヘル。之ガ実数qニ対シ、整函数（当然qガ複素数ノ時モ整函数）トスレバ容易ニ任意ノ四元数qニ対シテモ、收斂スルコトガ判ル。

$\boxed{\text{定理}}$ 実係数ヲ有スル四元数ノ巾級数（勿論常数ナラザル）

$$f(q)=\alpha_0+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\cdots\cdots+\alpha_n q^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n q^n$$

ニ於テ、qガ実数ナル時、整函数（当然qガ複素数ノ時モ整函数、又qガ任意ノ四元数ナル時モ收斂スル）トスル時、四元数ノ函数$f(q)$ガ週期$\omega=d+ai+bj+ck\ (\neq 0)$ヲ有スルナラバ（即チ任意ノ四元数$q$ニ対シ$f(q+\omega)=f(q)$ナラバ）週期$\omega$ハ実数デアル。

（証明）間接法ニ依ル。$\omega\ (\neq 0)$ヲ実数デナイトスレバ§1. ニ於テ述ベタヤウニ、四元数ωハ次ノ形デ書ケル。

$$\omega=d+ai+bj+ck=d+\alpha n(\omega)$$

但シ、$\alpha=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ (>0)$ $n(\omega)=\dfrac{ai+bj+ck}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ デ、$n^2(\omega)$

ニ一カラデアル。

スルト、$n^2(\omega)=-1$ デアルカラ、$f(q)$ハ実数qニ対シ、複素数ノ週期 $\omega_1=d+\alpha i\ (\alpha>0)$ ヲ持ツ。$f(q)$ノ展開式ハ、係数ガ実数デアルカラ、実数qニ対シ、$f(q)$ハ又$\omega_2=d-\alpha i\ (\alpha>0)$ナル週期ヲ持ツ。

qガ実数ナル時、整函数$f(q)$ハω_1, ω_2ナル週期ヲ持ツカラ、一致ノ定理ニ依リ当然qガ複素数ナルトキモ$f(q)$ハ二ツノ週期$\omega_1=d+\alpha i,\ \omega_2=d-\alpha i\ (\alpha>0)$ヲ持ツ。以下議論ヲ二ツノ場合ニ分ツ。

<u>第一ノ場合</u>　$d\neq 0$ ナル時

此ノ時ハ、$d\neq 0,\ \alpha\neq 0$ ナル故、複素数ノ範囲ニ於テ、整函数$f(q)$ハ独立ナル二ツノ週期ω_1, ω_2ヲ持ツカラ、ヨク知ラレタ楕円函数ニ関スル *Liouville* ノ第一ノ定理カラ、$f(q)$ハ常数トナル。之ハ矛盾デアル。

<u>第二ノ場合</u>　$d=0$ ナル時、

此ノ時$f(q)$ハqガ複素数ナル時、週期$\alpha i\ (\alpha>0)$ヲ持ツ。

スルト、$\omega=d+ai+bj+ck=ai+bj+ck$ ガ$f(q)$ノ週期ナル故、任意ノ四元数qニ対シ

(1)　$f(q+ai+bj+ck)=f(q)$

(1)ニ於テqノ代リニ　$q+\alpha i$ トオケバ

(2)　$f\{q+(a+\alpha)i+bj+ck\}=f(q+\alpha i)$

処ガ、qガ任意ノ実数ナル時モ、$f(q+\alpha i)=f(q)$

之ト(2)トカラ、結局qガ任意ノ実数ナル時

$$f\{q+(a+\alpha)i+bj+ck\}=f(q)$$

故ニ q が実数ナル時、$(a+\alpha)i+bj+ck$ ハ $f(q)$ ノ週期トナル。

故ニ前述ノ論法ヲ繰リ返セバ、q が複素数ナル時、

$\sqrt{(a+\alpha)^2+b^2+c^2}\,i$ ハ $f(q)$ ノ週期トナル。

結局複素数 q ノ整函数 $f(q)$ ハ虚軸上二ツノ週期 αi、

$\sqrt{(a+\alpha)^2+b^2+c^2}\,i$ ヲ持ツコトが判ツタ。

次ニ q が複素数ノ時 $f(q)$ ハ整函数デ週期 $\alpha i\ (\alpha>0)$ ヲ有スル故、虚軸上 αi ヲ基本週期（即チ絶対値が最小ナ週期）ニトツテオクコトが出来ル、更ニ $w=ai+bj+ck$ が週期ナル故、$-w$ モ亦週期デアルカラ、$a\geqq 0$ ト仮定シテモ一般性ハ損ジナイ。

αi が基本週期ナル故 $\sqrt{(a+\alpha)^2+b^2+c^2}\,i$ ハ αi ノ整数倍トナラネバナラヌ。今ノ場合ハ、零倍又ハ正ノ整数倍トナラネバナラヌ。即チ $p=\dfrac{\sqrt{(a+\alpha)^2+b^2+c^2}\,i}{\alpha i}=\dfrac{\sqrt{(a+\alpha)^2+b^2+c^2}}{\alpha}$

トオケバ、p ハ負ナラザル整数トナル。

トコロが、
$\alpha=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ナル故

$$p=\sqrt{2+\frac{2a}{\alpha}}$$

又、$\dfrac{a}{\alpha}\leqq 1$ ナル故　　$p\leqq 2$　　結局　$0\leqq p\leqq 2$.

コヽデ p ハ $0, 1$ ニハナリ得ナイコトハ、スグ判ル。何者、$p=0$ トナレバ $a+\alpha=b=c=0$。トコロが $a\geqq 0, \alpha>0$ ナル故、明ニ矛盾デアル。又、$p=1$ トナレバ $\alpha^2+2\alpha a=0$ ト

ナリ、之モ$\alpha>0$, $a\leqq 0$ トナルコトト矛盾スル。

故ニ結局 $p=2$ トナラネバナラナイ。コノ時ハ $b=0, c=0$ トナルカラ $\alpha=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a\ (>0)$ トナル。

$b=0, c=0$ ナル故 $\omega=ai+bj+ck=ai$ トナリ、従ツテ、q ガ四元数ナル時、$ai\ (a>0)$ ハ $f(q)$ ノ週期トナルコトガ判ツタ。故ニ、任意ノ四元数q ニ対シ

(3) $f(q+ai)=f(q)$

(3)ニ於テq ノ代リニ $q+aj$ トオケバ

(4) $f(q+ai+aj)=f(q+aj)$

トコロガ q ガ実数値ヲトルトキハ、勿論 $f(q+ai)=f(q)$ デ、底i, j ハトモニ $i^2=-1, j^2=-1$ ナル性質ヲ具ヘテキルカラ q ガ実数ナルトキハ $f(q+aj)=f(q)$ トナル。

之ト(4) トヨリ q ガ実数ナルトキハ $ai+aj$ ハ $f(q)$ ノ週期トナル。即チ $f(q+ai+aj)=f(q)$

スルト以前ノ論法ニヨリ。q ガ実数ナル時 $\sqrt{a^2+a^2}\,i=\sqrt{2}ai$ $(a>0)$ ナル複素数ハ $f(q)$ ノ週期トナル。一致ノ定理ニヨリ、複素数 q ニ対シテモ、$\sqrt{2}ai$ $(a>0)$ ナル複素数ハ $f(q)$ ノ週期トナル。

故ニ $f(q)$ ハ q ガ複素数ナルトキ、二ツノ週期 $ai, \sqrt{2}ai\ (a>0)$ ヲ持ツ。トコロガ ai ハ基本週期デアルカラ、$\sqrt{2}ai$ ハ ai ノ整数倍トナラネバナラヌ。之ハ明ニ矛盾デアル。結局定理ハ証明サレタ。　　　　（証了）

§3. 應用例

四元数体ニ於ケル指数函数、正弦函数、餘弦函数ヲ夫々次式ニ依リ定義スル。

$$e^{q}=\exp(q)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{n}}{n!}$$

$$\sin q=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos q=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{q^{2n}}{(2n)!}$$

之等ハ何レモ任意ノ四元数 q ニ対シ收斂スルコトハ勿論デアル。

先ヅ之等ノ三ツノ函数ノ間ニハ如何ナル関係ガアルカ調ベテ見ルト複素数ニ於ケル Euler ノ公式ニ当ルモノトシテ、次ノ関係式ハ容易ニ証明サル。

$$\begin{cases}\cos q+n(q)\sin q=e^{n(q)q}\\[2mm] \sin q=\dfrac{e^{n(q)q}-e^{-n(q)q}}{2n(q)}\\[2mm] \cos q=\dfrac{e^{n(q)q}+e^{-n(q)q}}{2}\end{cases}$$

更ニ $\sin^{2}q+\cos^{2}q=1$

$$e^{q}=e^{d}\left\{\cos\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}+n(q)\sin\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}\right\}$$

ノ成立モ容易ニ証明サレル。コヽニ $q=d+ai+bj+ck$ ナリトスル。

次ニ加法定理ハ如何カト云フニ、$AB=BA$ ナル二ツノ四元数

A, B ニ対シテハ

$$exp(A+B)=exp(A)\,exp(B)$$

ガ容易ニ証明サレルガ 一般ニ成リ立タナイ。従ッテ $\sin q$ $\cos q$ ノ加法定理モ一般ニハ成リ立タナイ。

次ニ週期性ニ就イテ云フト、$exp(q)$ ニ就イテハ加法定理ガ成リ立タナイ為 週期ニ関シテノ考察ガ一寸困難デアルガ、上記ノ定理ヲ用ヒレバ q ガ四元数ナルトキハ、週期ガ存在シナイコトガ判ル。

更ニ、上述ノ定理ヲ用キレバ $\sin q$, $\cos q$ ノ週期ハ 2π ニ限ルコトガ判ル。

次ニ上述ノ定理ノ証明ニ於テ (1) カラ (2) ヲ導イタ所ト (3) カラ (4) ヲ導イタ所アタリノ論法ヲ見レバ、容易ニ上記ノ定理ヲ鋭クシタ次ノ定理ガ得ラレル。

$\boxed{\text{定理}}$ 実係数ヲ有スル四元数ノ巾級数（勿論常数ナラザル）

$$f(q)=\alpha_0+a_1 q+a_2 q^2+\cdots a_n q^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$$

ニ於テ q ガ実数ナルトキ整函数（勿論任意ノ四元数 q ニ対シ収斂スル）トスル。コノ時、$\alpha_1+a_1 i$, $\alpha_2+b_1 j$ ナル形ヲ有スル四元数 q ニ対シ $f(q)$ ガ週期 $\omega=\alpha+ai+bj+ck\,(\neq 0)$ ヲ持ツナラバ ω ハ実数デアル。但シ $\alpha_1, \alpha_2, a_1, b_1$ 等ハスベテ実数ナリトスル。

（完）