[1195] 面積ノ概念ニ基ヅク空間ノ幾何學

岩本 秀行（名大）

（10月23日受付）

B. Riemann ハ有名ナ „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrgrunde liegen (Habilitationsschrift 1854: Gött. Abh. 13. 1868; Gesammelte Werke, 2. Aufl, Leibzig 1892, S. 272)" ニ於テ Euclid 空間ノ自然ナ拡張トシテ、n 次元ノ数空間 Ω^n ノ隣接スル二点 $(x^1, \cdots, x^n)$, $(x^1+dx^1, \cdots, x^n+dx^n)$ 間ノ距離ヲ 場所ノ函数トシテ apriori ニ与ヘラレタ正値二次形式

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

ヲ用ヒテ定義スル思想ヲノベ，所謂 Riemann 空間ヲ創造シタ、其後 P. Finsler ハ Riemann 空間ヲ更ニ擴張シタ（P. Finsler, Dissert, Göttingen. 1918）. Finsler ノ考ヘタノハ、Ω^n ノ中ニ parameter t ヲ用ヒテ画カレタ曲線 $x^i(t)$ ノ長サガ，$\frac{dx^i}{dt}$ ニ関スル一次同次函数 $F(x, \frac{dx}{dt})$ ヲ用ヒテ

$$S = \int F(x, x') \, dt.$$

ノ形デアタヘラレル空間デアル． E. Cartan, ハコノ様ナ空間ノ幾何学化ノ問題ヲ解決シタ（E. Cartan, Les espaces de Finsler, 1934）、

コノ様ナ考ヘヲ更ニ進メテ „曲線ノ長サ" ノ代リニ „K次元

測度"ノ概念ヲ基礎ニトッテモ同ジ様ニ幾何学ガ構成サレナイカトイフ問題ガ自然ニ起ル。即チn次元空間ニK次元曲面$x^i = x^i(u^1\cdots, u^k)$ガ与ヘラレタトキ，ソノ上ノ或ル領域$\Omega$ノ面積ガ積分不変量

$$O = \int_\Omega \omega(d), \qquad \omega(d) = L\left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u}\right) du^{(1)}\cdots du^{(k)}$$

デアタヘラル空間ノ幾何学デアル Cartan ハ Finsler 空間ト丁度 dual ナ関係ニアル場合即チ $K = n-1$ ノ場合ヲ論ジタ (E. Cartan, des espaces metriques fondes sur la notion d'aire 1933) Cartan ノ方法トイフノハ函数F或ハLカラ Riemann 空間ノ基本 tensor ノ拡張ニ相当スル tensor g_{ij} ヲ自然ニ導キ、之ヲ用ヒテ Euclid 接続ヲ極メテ巧妙ナ方法デ決定スルノデアルガ、一般ノ場合ニハ問題ハ非常ニ困難トナル、河口，穂刈両博士ハ$(n, K) = 1$ノ場合ヲ論ゼラレ、又最近河口博士ハ$(n=5, K=2)$ノ場合ノ基本テンゾルヲ決定サレタ。

(Proc. Imp. Acad. 1940 テンゾル第六号 1943)

本論文ノ目的ハ(I)ニ於テ Riemann 空間ニ於ケルK次元測地的集合体ヲ、我々ノ考フル一般ノ場合ニ定義シテ、之ヲ用ヒテ我々ノ空間ニ接続ヲ導入スルコト、、(II)ニ於テ基本テンゾル$g_{ij}\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}\right)$ヲ自然ニ定義シ得ル為ノ條件ヲ求メルコトデアリマス，ソノ為(1)ニ於テハ二組ノ添字$(i_1\cdots i_k)(j_1 - j_k)$ノ各々ニ関シ交代デ、此等ノソノマヽ入レカヘテモ不変ナ量

$g_{i_1\cdots i_K\, j_1\cdots j_K}$ ヲ、L ノ $\frac{\partial x}{\partial u}$ ニ関スル二回ノ偏導函数ヲ用ヒテ組立テ得ル事ヲ示シ、之カラ K-vector ノ Euclid 接続ヲ定義シ、之ヲ用ヒテ Riemann 空間ニ於ケル Euler-Schouten ノ tensor

$$N^i_{\lambda\mu}=(\delta^i_j-p^i_j)p^j_{\lambda\mu}+\Lambda^i_{\lambda\mu}(x\ p)$$

ヲ定義シマス (II) ニ於テ更ニ

$$g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K}=g_{[i_1|j_1|}\cdots g_{i_K]j_K}$$

ナル如キ tensor g_{ij} ノ存在ヲ仮定シ、コノ様ナ tensor ガ若シ存在スルナラバ唯一ツニ限ルコトヲ證明シ、之ヲ用ヒテ Euclid 接続ヲ導キ、部分空間ノ理論等ヲ簡單ニノベマス。

以下スベテ次ノ記法ヲ用ヒマス。

$i.j.k=1,2,\cdots,n$

$\lambda.\mu.\nu\cdots;\ \alpha.\beta.\gamma,\cdots=1,2,\cdots,K$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}=p^i_\lambda,\quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\lambda\partial u^\mu}=p^i_{\lambda\mu},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial p^i_\lambda}=\Phi^\lambda_{,i}\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}=\Phi_{,i}$$

$$p^i_j=p^i_\lambda p^\lambda_j,\qquad p^\lambda_j=L^{-1}L^\lambda_j,$$

$$q^i_j=\delta^i_j-p^i_j$$

(I)

1° K-基本テンソル $g_{i_1\cdots i_K;j_1\cdots j_K}$ ノ決定

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

デ定義サレタ n 次元 Riemann 空間ノ中ニ K次元ノ曲面 $x^i=x^i(u^\lambda)$ ヲトリ $g_{\lambda\mu}=p^i_\lambda p^j_\mu g_{ij}$ $g=|g_{\lambda\mu}|$ トオケバ曲面上ノ領域 Ω ノ面積ハ

$$0=\int V_{\bar{i}}\; du^{[1}\cdots du^{n]}$$

デ与ヘラレ、上ノ空間ノ特別ノ場合トナル、今

$$p^{i_1\cdots i_k}=k!\; p^{[i_1}_{1}\cdots p^{i_k]}_{k}\;,\quad g_{i_1\cdots i_k,\,j_1\cdots j_k}$$

$$=g_{[i_1|j_1|}\cdots g_{i_k]j_k}$$ トナル。

$$g=g_{i_1\cdots i_k,\,j_1\cdots j_k}\,p^{i_1\cdots i_k}\,p^{j_1\cdots j_k}$$

次ニCartan空間デ $p^{i_1\cdots i_{n-1}}$ ヲ一ツノ重サノアル共変ベクトルト考ヘ、之ヲu_iトスレバ$L(x,\frac{\partial x}{\partial u})$ハ$x$ト$u$ノミノ函数トナル。之ヲ更メテ$L(x,u)$

トカキ

$$a^{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i\,\partial u_j}$$

トオケバ $\qquad L=\sqrt{a^{ij}u_iu_j}\qquad$ トナル

我々ノ第一ノ目標ハ上ノ$g_{i_1\cdots i_k,\,j_1\cdots j_k}$或ハ$a^{ij}$ニ相当スル量ヲ一般ノ場合ニ定義シヤウトイフノデアル。

Riemann 空間ニ於テ

(＊) $$\frac{\partial^{2k}L^2}{\partial p^{i_1}_{[1}\cdots\partial p^{i_k}_{k]}\,\partial p^{j_1}_{[1}\cdots\partial p^{j_k}_{k]}}=S\,g_{i_1\cdots i_k,\,j_1\cdots j_k}$$

（Sハ或ル正数）

トオケバ $g_{i_1\cdots i_k,\,j_1\cdots j_k}$ ハ上ニ定義シタ$g_{i_1\cdots i_k,\,j_1\cdots j_k}$ト一致スル、又Cartan空間ニ於テモ、之ヲ反変相対tensorト考ヘテa^{ij}トオケバ、之ハ上ノa^{ij}ト一致スル以下Cartan空間ニツイテコノコトヲ証明シヨウ.

φヲ経数変換ニ対シ一荷ノスカラートスレバ

$$\phi^{\lambda_1}_{i_1}\, p^{i_1}_{\mu_1} = \delta^{\lambda_1}_{\mu_1}\,\phi$$

$$\phi^{\lambda_1}_{i_1}{}^{\lambda_2}_{i_2}\, p^{i_1}_{\mu_1} = \delta^{(\lambda_1}_{\mu_1}\,\phi_{i_2}^{\lambda_2)}$$

......

$$\phi^{\lambda_1}_{i_1}\cdots{}^{\lambda_\alpha}_{i_\alpha}{}^{\lambda_{\alpha+1}}_{i_{\alpha+1}}\, p^{i_1}_{\mu_1}\cdots p^{i_\alpha}_{\mu_\alpha} = \delta^{(\lambda_1}_{\mu_1}\cdots\delta^{\lambda_\alpha}_{\mu_\alpha}\,\phi^{\lambda_{\alpha+1})}_{i_{\alpha+1}}$$

ガ成立スル $\alpha \geqq K$ ナラ右辺ハ恒等的ニ0デアル。コノ事実デ

$L^{2(j}_{i_1}\cdots{}^{k)}_{i_K}$ ニ対シテ用フレバ

$$g_{i\cdots i_K;\, j_1\cdots j_K},{}^{\lambda}_{h}\, p^{j_1\cdots j_K} = 0 \quad 又\ g_{i_1\cdots i_K}$$

$_{j_1\cdots j_K}\ p^{i_1\cdots i_K} p^{j_1\cdots j_K} = L^2$ モ殆ド同様ニ証明出来ル。

$K = n-1$ ナラ

$$a^{ij},{}^{\lambda}_{h}\, u_j = 0$$

或ハ
$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial p^h_\lambda} u_j = 0,$$

L. Berwald ニヨレバ $\frac{\partial u_k}{\partial u^h_\lambda} = u_k p^\lambda_h - u_h p^\lambda_k$ ダカラ

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} u_k = 0$$

ニヨリ $\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} p^\lambda_k u_j = 0$, 即チ $\frac{\partial a^{ij}}{\partial u^k} p^k_h u_j = 0$

コヽデ $u_i u^j + p_i^j = \delta_i^j$, ヲ利用スレバ

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial u_k} u_k = 0$$

之ト $L = \sqrt{a^{ij} u_i u_j}$ ヨリ $a^{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_j}$

従ツテ(ヰ)デ $g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K}$ ヲ定義シテモヨイノデアルガ、之ハ函数Lノ2K回ノ偏微分ヲ含ンデヰル、以下デハ適当ナ modification デ唯二回ノ微分シカ含マヌモノヲツクリ得ルコトヲ示ス。

Rieman 空間或ハ Cartan 空間デハ次ノ等式ガ成立スル。

$$L_{i\,j}^{(\lambda\,\mu)}=2L^{-1}L_i^{[\lambda}\;\;L_j^{\mu)}$$

$$L^2=2F \quad \text{トオケバ}$$

$$F_i^{\lambda}=L\,L_i^{\lambda}$$

$$F_{i\,j}^{(\lambda\,\mu)}=L_i^{(\lambda}L_j^{\mu)}+L\,L_{i\,j}^{(\lambda\,\mu)}=3\,L_i^{(\lambda}L_j^{\mu)}$$

$$F_{i\,j\,k}^{(\lambda\,\mu)\,\nu}=3\,L_k^{\nu(\lambda}_{\;i}L_j^{\mu)}+3\,L_i^{(\lambda}L_{j\;k}^{\mu)\,\nu}$$

従ツテ $F_{i\,j\,k}^{(\lambda\,\mu\,\nu)}$ ハ又 $L_i^{(\lambda}L_j^{\mu}L_k^{\nu)}$ ノ整数倍ニナル、コノ操作ヲツヅケテユケバ結局 $F_{i_1\cdots i_\alpha}^{(\lambda_1\cdots\lambda_\alpha)}$ ガ $L_{i_1}^{(\lambda_1}\cdots L_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha)}$ ノ整数倍ニナル、従ツテ

$$N\,F_{i_1\cdots i_K}^{(\lambda_1\cdots\lambda_K)}=L^{2-K}L_{i_1}^{(\lambda_1}\cdots L_{i_K}^{\lambda_K)}$$

従ツテ $F_{i_1\cdots i_K}^{(\lambda_1\cdots\lambda_K)}{}_{j_1\cdots j_K}^{(\mu_1\cdots\mu_K)}$ ハ $L_i^{\lambda}{}_{j_1\cdots j_\alpha}^{(\mu_1\cdots\mu_\alpha)}$ ノ形ノ量ノ積ノ和ニナル。

$M\,L_{i\;j_1\cdots j_\alpha}^{\lambda(\mu_1\cdots\mu_\alpha)}=\frac{\partial}{\partial\dot{x}^{\lambda}}L_{j_1}^{(\mu_1}\cdots L_{j_\alpha}^{\mu_\alpha)}$ デアルカラ結局 $g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K}$ ハ L, L_i^{λ}, $L_{i\,j}^{\lambda\,\mu}$ ノ或ル整係数ノ Polynomial ニナルコトガ分ル即チ

$$g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K}=P_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K}(L,\,L_i^{\lambda},\,L_{i\,j}^{\lambda\,\mu})$$

我々ハ一般ノ場合ニ於テモ上ノ $P_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K}$ ヲ以テ、

$g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K}$ ヲ定義シヨウトイフノデアル、カヽスルモ関係式

AI $\quad L^2 = g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K}\, p^{i_1\cdots i_K}\, p^{j_1\cdots j_K}$

AII $\quad g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K,\,\overset{\lambda}{k}}\, p^{j_1\cdots j_K} = 0$

ハ成立スル、結局 AI, AII ヲ満足スル $g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K}$ ガ、L ノ二回（三回）ノ偏導函数ノ存在ノ假定ノ下ニ定義出来タワケデアル。

我々ハ更ニ $g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K}$ ノ inverse system ガ存在スルコトヲ假定シ、又二次形式 $g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K}\, x^{i_1\cdots i_K}\, x^{j_1\cdots j_K}$ ガ正値ナルコトヲ假定スル又 $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}$ ノ行列式ヲ $g^{\binom{n-1}{k-1}}$ $(g>0)$ トカクコトニスル。

2° K-Euclid 接続

次ニ K-vector ノ接続ヲ

$$Dv^{i_1\cdots i_K} = dv^{i_1\cdots i_K} + \omega^{i_1\cdots i_K}_{j_1\cdots j_K}(d)\, v^{j_1\cdots j_K}$$

$$\omega^{j_1\cdots j_K}_{i_1\cdots i_K}(d) = \Gamma^{j_1\cdots j_K}_{i_1\cdots i_K,\,k}\, dx^k + C^{j_1\cdots j_K}_{i_1\cdots i_K,\,\overset{\lambda}{k}}\, dp^k_\lambda$$

デ定義スル。接続ガ Euclidian ダト假定スレバ、

$$g_{i_1\cdots i_K\, j_1\cdots j_K,\,\overset{\lambda}{k}} = C_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K,\,\overset{\lambda}{k}} + C_{j_1\cdots j_K,\,i_1\cdots i_K,\,\overset{\lambda}{k}}$$

$$g_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K,\,k} = \Gamma_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K,\,k} + \Gamma_{j_1\cdots j_K,\,i_1\cdots i_K,\,k}.$$

但シ $\quad C_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K,\,\overset{\lambda}{k}} = g_{j_1\cdots j_K,\,k_1\cdots k_K}\, C^{k_1\cdots k_K}_{i_1\cdots i_K\,\overset{\lambda}{k}}$

$\quad \Gamma_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K,\,k} = g_{j_1\cdots j_K,\,k_1\cdots k_K}\, \Gamma^{k_1\cdots k_K}_{i_1\cdots i_K,\,k}$

トスル。$C_{i_1\cdots i_K,\,j_1\cdots j_K\,\overset{\lambda}{k}} = C_{j_1\cdots j_K,\,i_1\cdots i_K,\,\overset{\lambda}{k}}$

ナル條件ヲオケバ

$$C_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K, k}^{\lambda} = \frac{1}{2} g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K, k}^{\lambda}$$

トナル。次ノ関係ガ成立スル。

A II'、 $C_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots i_K, k}^{\lambda} p^{j_1\cdots j_K} = 0$

3° 基接続

$p^{i_1\cdots i_K}$ ノ共変微分ハ A II' ニヨリ

$$Dp^{i_1\cdots i_K} = dp^{i_1\cdots i_K} + \Gamma_{j_1\cdots j_K, k}^{i_1\cdots i_K} p^{j_1\cdots j_K} dx^k - d(\log F).$$

$p^{i_1\cdots i_K}$

今 $\delta p_\lambda^i = (\delta_{i_1}^i \cdots p_{i_1}^i) p_{i_2}^{[i_1} \cdots p_{i_\lambda}^{\lambda+1} p_{i_{\lambda+1}}^{\lambda+1} \cdots p_{i_K}^{K]} Dp^{i_1 i_2\cdots i_K}$

トオケバ δp_λ^i ハ $p_i^\nu \delta p_\mu^i = 0$ ヲ満足シ、

$$\delta p_\lambda^i = (\delta_j^i \cdots p_j^i) dp_\lambda^j + \Lambda_{k\lambda}^i dx^k$$

ノ形トナル。之デ基接続ヲ定義スルコトガ出来ル。

$$\omega_{j_1\cdots j_K}^{i_1\cdots i_K}(d) = \Gamma_{j_1\cdots j_K, k}^{*i_1\cdots i_K} dx^k + C_{j_1\cdots j_K, k}^{i_1\cdots i_K \lambda} \delta p_\lambda^k$$

トスレバ

$\Gamma_{j_1\cdots j_K, k}^{*i_1\cdots i_K}$ ハ Riemenn 空間ノ

$$\Gamma_{j_1\cdots j_K, k}^{i_1\cdots i_K} = \sum_\alpha \delta_{j_1}^{[i_1} \cdots \left\{ {i_\alpha \atop j_\alpha\ k} \right\} \cdots \delta_{j_K}^{i_K]}$$

ト同一ノ変換ヲスル、之ヲ決定スル方程式ヲツクルニハ普通ノ Euclid 接続ノ場合ト殆ンド同様ナ條件ヲオケバヨイ。

4° K次元測地的集合体

$$N_{\lambda\mu}^i = (\delta_j^i - p_j^i) p_{\lambda\mu}^j + \Lambda_{j(\lambda}^i p_{\mu)}^j$$

トオク $N_{\lambda\mu}^i$ ハ丁度 Riemann 空間或ハ Cartan 空間ニ於ケル Eucer-Schonten ノ tensor ノ拡張ニナル，ソニデ

$$N^i_{\lambda\mu} = 0$$

解ヲK次元ノ測地的集合体トイフコトニスル。コレハ一般ニハ積分不可能デ、唯幾何学的ニハ各点デ一次ノ plane element ニ二次 plane element ヲ対應サセル operation ヲ表ハスト考ヘネバナラナイ

サテ次ノ如キ函数 $H^i_{\lambda\mu}(x,p)$ ヲ求メルコトガ出来ル。

$$N^i_{\lambda\mu} = (\delta^i_j - p^i_j)(p^j_{\lambda\mu} + H^j_{\lambda\mu})$$

$$\frac{\partial H^j_{\lambda\mu}}{\partial p^{\omega}_{i}} p^{i}_{\nu} = \delta^{\omega}_{\lambda} H^{j}_{\mu\nu} + \delta^{\omega}_{\mu} H^{j}_{\lambda\nu}$$

ソレニハ例ヘバ $H^i_{\lambda\mu}$ トシテ $\Lambda^i_{\lambda\mu}$ ヲトレバヨイ。上ノ様ナ $H^i_{\lambda\mu}$ ガ二ツアルトスレバ必ズ $\overset{*}{H}{}^i_{\lambda\mu} = H^i_{\lambda\mu} + \varphi^{\nu}_{\lambda\mu} p^i_{\nu}$ ナル関係ガアル $\varphi_{\lambda\mu}$ ハ (x, p) ノミノ函数デアル。之カラ Thomas ノ Projektive Parameter ニ相当スル量ヲ求メルコトガ出来ル即チ

$$\text{並ニ}\quad \Pi_{jk} = \Gamma_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \Gamma^h_{hk} + \delta^i_k \Gamma^h_{hj}) - \frac{1}{n-K}(\Gamma^h_{jk;h}{}^{\nu} - \frac{1}{n-1}\Gamma^h_{h}{}^{\nu}_{j}\cdot P^{\nu}_{k})) p^i_{\nu}$$

(J. Douglas Mat. Ann 1931)

ソコデ $\gamma^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j q^*_k + \delta^i_k q^*_j$, $\frac{\partial}{q} dq = q^*_i dx^i + q^\lambda_i \delta p^i_\lambda$ トオケバ之デ共変微分

$$\delta v^i = dv^i + \gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

ガ定義サレル。

之ノ係数ハ L ノ 6 回ノ偏微分ヲ含ンデヰル。

或ハ $W^{i_1\cdots i_K}_{j_1\cdots j_K}(d)$ カラ普通ノ接続 $W^i_j(d)$

$$\omega^i_j(d) = \frac{K(K-1)\cdots 3.2.}{(n-K)\cdots(n-2)}\omega^{i i_2 \cdots i_K}_{j i_2 \cdots i_K} - \frac{((p-1)!)^2}{(n-p)\cdots(n-1)}\delta^i_j \omega^{i_1\cdots i_K}_{i_1\cdots i_K}$$

ト求メル事ガ出来ル。(H. Hombu, Proc. Imp. Acad. 1936)

之ハLノ三回ノ偏微分マデヲ含ム

III.

1° 基本テンソル $g_{ij}(\tau.p)$ ノ決定

次ニ

A III. $g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K} = g_{[i_1|j_1|}\cdots g_{i_K]j_K}$

ナル如キ二次形式 g_{ij} ノ存在ヲ要求スル。コノ様ナ g_{ij} ハ若シ存在スレバ唯一ツニ限ル。即チ

n 次元 Affin 空間デ基本テンソル $g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K}$ ニヨリ定義サレタK次元体積ガ或ル Pythagorian metric ニ基ヅクモノデアレバソノ様ナ metric ハ唯一ツニ限ル。

之ハ次ノ如ク証明サレル。考フル n 次元 Affin 空間ニ $n-1$ コノ vector,

$$a_{(1)} \quad (a^1_{(1)}, \cdots\cdots, a^n_{(1)})$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{(n-1)} \quad (a^1_{(n-1)} \cdots\cdots, a^n_{(n-1)})$$

ヲトル。而シテ

$$p_{\lambda_1\cdots\lambda_K. \mu_1\cdots\mu_K} = g_{i_1\cdots i_K, j_1\cdots j_K} a^{i_1}_{[\lambda_1}\cdots a^{i_K}_{\lambda_K]} a^{j_1}_{[\mu_1}\cdots a^{j_K}_{\mu_K]}$$

トオキ, $p_{\lambda_1\cdots\lambda_K, \mu_1\cdots\mu_K}$ ノ $(\lambda_1\cdots\lambda_K)$, $(\mu_1\cdots\mu_K)$ ヲ夫々縦横ニ並ベテ出来ル行列ノ行列式ヲ $\Delta(a_{(1)}\cdots a_{(n-1)})$ トスルハ

$a^{[i_1}_{(1)}\cdots a^{i_{n-1}]}_{(n-1)}$ ヲ共変相対ベクトルト考ヘテ之ヲ (a_i)

トオケバ

$$\Delta(a_{(1)},\cdots,a_{(n-1)})=(g^{ij}a_i a_j)^{\binom{n-1}{k-1}}$$

トナル、$(a_1,\cdots,a_n)$ ハ独立変数ト考ヘラレルクラ之デ定理ハ證明サレタノデアル。

2° Euclid 接續ノ導入

Cartan ニ從ッテ Ω^n ノ各 plane element (x,p) ニ対シ切 Euclid 空間 $E^n(x,p)$ ガ対應シテヰルモノトスル。

$E^n(x,p)$ ノ中ニ自然標高 $[e_1,\cdots e_n]$ ヲトル然ラバ

1° Ω_n ノ一点 M ヨリ $M+dM$ ヘノ微小移動ガ

$$dM=e_i\,dx^i$$

デ表ハサレ

2° $ds^2=(dM,dM)$ 或ハ $(e_i,e_j)=g_{ij}$

$E^n(x+dx,\ p+dp)$ ヲ $E^n(x,p)$ ニ移ス無限小 Euclid 変換即チ接續ヲ

$$de_i=\omega_i^j(d)\,e_j,$$

$$\omega_i^j(d)=\Gamma^{*j}_{i\,k}\,dx^k+C^{j\lambda}_{i\,k}\,\delta p^k_\lambda$$

デ定義スル $\Gamma^{*j}_{i\,k}$, $C^{j\lambda}_{i\,k}$ ハ次ノ如ク決定サレル。

$$C^{i\lambda}_{j\,k}=\frac{1}{2}g^{ih}g_{hj,\ k}^{\ \ \ \lambda}$$

$$\Gamma^{*i}_{j\,k}=\frac{1}{2}g^{ih}\{g^*_{hk,j}+g^*_{hj,k}-g^*_{jk,h}\}$$

茲ニ $dg_{ij}=g^*_{ij,k}\,dx^k+g_{ij,\ k}^{\ \ \ \lambda}\,\delta p^k_\lambda$ トスル

コノ ω_i^j ヨリ

$$\omega_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_k}(d)=\sum_{\alpha}\delta_{i_1}^{[j_1}\cdots\omega_{i_\alpha}^{j_\alpha}\cdots\omega_{i_k}^{j_k]}$$

ヲツクレバソレハ(I)デ定義シタK－接続ト一致スル。

, 3° L_i^λ $C_{ij}{}^\lambda_k$ Γ_{jk}^i ノ性質

次ノ諸関係が成立スル。

AIV. $L^{-1}L_i^\lambda=g_{ij}g^{\lambda\mu}p_\mu^j$

AV. $(\delta_j^i-p_j^i)p_\lambda^k C_{ik}{}^\mu_k=0$

AVI. $p_\mu^j\, p_i^\mu\, C_j^i{}^\lambda_k=0$

AVII. $q_i^j\, p_h^\lambda\, p_\lambda^k\, \Gamma_{jk}^h=q_i^j L^{-1}L_{,j}$

先ヅ AI, AII カラ

$$\frac{\partial L}{\partial p_\lambda^i}=L^{-1}g_{i_1\cdots i_k,j_1\cdots j_k}p^{i_1\cdots i_k}\frac{\partial p^{j_1\cdots j_k}}{\partial p_\lambda^i}$$

$L=\sqrt{|p_\lambda^i p_\mu^j g_{ij}|}$ ヲ用ヒテ変形スレバ

$$=L^{-1}\left|g_{ij}p_\mu^i\frac{\partial p^j{}_\nu}{\partial p_\lambda^i}\right| \quad (\mu,\nu)\text{ =関スル行列式}$$

$$=L g_{ij}g^{\lambda\mu}p_\mu^j$$

次ニ AV ノ証明 AII' ハ幾何学的ニハ次ノコトヲ意味スル。

曲面上ノ(x)ニ於ケル切平面(p)ヲ $E^n(x,p+dp)$ ノ平面ト考ヘルトキ之ニハ接続ノ意味デ $E^n(x,p)$ ノ平面が対應スルソ

ノ平面ハヤハリ (x) デ曲面ニ切スル。

換言スレバ (p^i_λ) ナル vector ヲ $E^n(x,p+dp)$ ノ vector ト考ヘタトキ、之ニ対應スル $E^n(x,p)$ ノベクトルハ (x) ニ於テ曲面ニ切スル、即チ切平面ニ垂直ナ空間ニ垂直デアル

換言スレバ

$$(\delta^i_j - p^i_j)\, p^k_\lambda\, C_{ikh}^{\ \ \ \mu} = 0$$

之ハ切論式ノ計算カラモ出ル。

AVII ハ AIII カラ出ル。

$$g^j_i\, p^\lambda_k\, p^k_\lambda\, \Gamma^h_{jk} = g^j_i\, p^\lambda_k\, p^k_\lambda (\Gamma^h_{jk} \quad C^{h\nu}_{j\ell}\, \Lambda^\ell_{\nu k})$$

$$= g^j_i\, p^\lambda_k\, p^k_\lambda (\Gamma^h_{kj} - C^{h\nu}_{k\ell}\, \Lambda^\ell_{\nu j})$$

$$= g^j_i\, p^\lambda_k\, p^k_\lambda\, \Gamma^k_{kj} = L^{-1}\, g^j_i\, \frac{\partial L}{\partial x^j} \quad \text{即チ VIII}$$

4' 部分空間ノ理論

p^i_λ ヲ曲面ニ沿フテ共変微分スレバ

$$D_\mu\, p^i_\lambda = p^i_{\lambda\mu} + \Gamma^i_{jk}\, p^j_\lambda\ \ p^k_\mu + C^{i\ \nu}_{j\ k}\, p^j_\lambda\, p^k_{\nu\mu}$$

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = p^\nu_i\, D_\mu\, p^i_\lambda = p^\nu_i (p^i_{\lambda\mu} + \Gamma^i_{jk}\, p^j_\lambda\ \ p^k_\mu + C^{i\nu}_{jk}\, p^j_\lambda\, p^k_{\nu\mu})$$

ハ普通ノ意味デ曲面上ニ induce サレタ接続ヲ与ヘル、之ハ Euclidion デアルガ一般ニ捩率ヲモツ。

K次元曲面ハ $ds^2 = g_{\mu\nu}\, du^\mu du^\nu$ ナル metric ノ与ヘラレタ Riemam 空間ト考ヘルコトガ出来ル。曲面上ノ曲線 $x^i(s)$ ニツイテ

$$\frac{dx^i}{ds}=p^i_\lambda\frac{du^\lambda}{ds}$$

ヲ曲線ニ沿フテ共変微分スレバ

$$\frac{\delta^2 x^i}{ds^2}=p^i_\lambda\left(\frac{d^2u^\lambda}{ds^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds}\right)+H^i_{\lambda\mu}\frac{du^\lambda}{ds}\frac{du^\nu}{ds}$$

$$H^i_{\lambda\mu}=(\delta^i_j-p^i_j)(p^j_{\lambda\mu}+\Gamma^j_{kh}p^k_\lambda p^h_\mu)$$

トナル $\frac{\delta^2 x^i}{ds^2}$ ヲ曲線ノ絶対曲率ベクトル， $p^i_\lambda\left(\frac{d^2u^\lambda}{ds^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds}\right)$ ヲ相対曲率ベクトル、 $H^i_{\lambda\mu}\frac{du^\lambda}{ds}\frac{du^\mu}{ds}$ ヲ法曲率ベクトルトヨブ。相対曲率ベクトルガ曲線ニ沿フテ恒等的＝0ナル曲線（自平行曲線）デハ絶対曲率ベクトルハ法曲率ベクトルニ等シク曲面ニ直交スル $H^i_{\lambda\mu}$ ハ前ニ定義シタ $N^i_{\lambda\mu}$ ソノモノデアル。

$\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ ノ捩率ハ

$$B^\nu_{\lambda\mu}=C^{\nu\omega}_{\lambda k}H^k_{\omega\mu}-C^{\nu\omega}_{\mu k}H^k_{\omega\lambda}\quad \text{トナル。}$$

$$(C^{\nu\omega}_{\lambda k}=p^\nu_i\,p^j_\lambda\,C^{i\omega}_{jk})$$

$g_{\nu\omega}B^\omega_{\lambda\mu}=B_{\lambda\nu\mu}$ トオケバ

$$B_{0[\lambda\mu\nu]}=0$$

$\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ ハ

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu}=\left\{{}^{\ \nu}_{\lambda\mu}\right\}+C^{\nu\omega}_{\mu k}H^k_{\omega\lambda}-C^{\ \ \omega}_{\lambda\mu k}H^k_{\omega\pi}g^{\pi\nu}$$

$$\left\{{}^{\ \nu}_{\lambda\mu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\nu\omega}\left\{\frac{\partial g_{\omega\lambda}}{\partial u^\mu}+\frac{\partial g_{\omega\mu}}{\partial u^\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial u^\omega}\right\}$$

又次ノ関係ガ成立スル

A VIII $$L\Gamma^\nu_{\nu\lambda}=\frac{\partial L}{\partial \omega^\lambda}$$

変分ノ問題 $$\delta\int d\omega=0$$

カラ次ノ Euler ノ微分方程式ヲ得ル。

$$E_i \equiv \frac{\partial}{\partial u^\lambda}\frac{\partial L}{\partial p^i_\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad E_i\, p^i_j = 0$$

$E_i = g^j_i E_j$ ニヨリ

$$E_i = g^j_i\left(\frac{\partial}{\partial u^\lambda}(L\, p^\lambda_j) - \frac{\partial L}{\partial x^j}\right) = g^j_i\left(L\frac{\partial p^\lambda_j}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^j}\right)$$

$$= g^j_i\left(p^\lambda_{j,\lambda} - \Gamma^\lambda_{j\lambda} - C^{\lambda\nu}_{jk}\ p^k_{\nu\lambda}\right) \quad (\mathrm{AV}, \mathrm{AVII}, \mathrm{AVIII}\ ニヨリ)$$

$$= g^j_i D_\mu\, p^\mu_j = g_{ij}\, g^{\lambda\mu} D_\mu\, p^i_\lambda$$

即チ $\qquad E_i \equiv g_{ij}\, g^{\lambda\mu} H^i_{\lambda\mu}$

$H^i = g^{\lambda\mu} H^i_{\lambda\mu}$ ヲ平均曲率ベクトルトイフコトニスレバ

K 次元曲面ハ平均曲率ベクトルガ曲面ニ沿ツテ恒等的ニ0ナルトキニ限リ極小曲面デアル。

全測地的曲面ハ極小曲面デアル。

最後ニ AIV ヲ再ビ p^i_μ デ微分シテ次ノ関係ヲ得ル。

AIX. $\quad L^{(\lambda}_i{}^{\mu)}_j = 2L^{-1} L^\lambda_i L^\mu_j$

AX. $\quad L^{(\lambda\mu)}_{ij} = (g_{ij} - p^\alpha_i p^\beta_j g_{\alpha\beta}) g^{\lambda\mu}$

AX ハ又 $E_i \equiv g_{ij} g^{\lambda\mu} H^i_{\lambda\mu}$, $p^i_{\lambda\mu}$ ノ係数ヲ比較シテモ出ル。
之カラ g_{ij} ヲ explicit ニ求メルコトガ出来ル。

5° 空間ノ他ノ characterization

上ノ AI, AII ヲ同時ニ admit スル空間ハ次ノ公理系ヲ満足ス

ル基本テンソル g_{ij} ノ存在ニヨツテ characterize サレル。

BI $\quad L=\sqrt{|g_{\lambda\mu}|} \qquad g_{\lambda\mu}=p_\lambda^i p_\mu^j g_{ij}$

BII $\quad g_{ij,k}\, p_\lambda^i\, \bar{g}_k^k=0, \quad \bar{g}_k^j=\delta_k^j-g_{k\alpha}g^{\lambda\mu}p_\lambda^\alpha p_\mu^j$

BI, BII カラ

BIII. $\quad L^{-1}L_i^\lambda=g_{ij}\,g^{\lambda\mu}\,p_\mu^j$

ガ出ル. BIII ヲ p_μ^j デ偏微分シテ BII ヲ適用スレバ

BIV. $\quad L_{ij}^{(\lambda\mu)}=L^{-1}L_i^\lambda\, L_j^{(\mu)}$

BV. $\quad L_{ij}^{(\lambda\mu)}=(g_{ij}-p_i^\alpha\, p_j^\beta\, g_{\alpha\beta})\,g^{\lambda\mu}$

ガ出ル. BIV BV カラ

$$g_{i_1\cdots i_K,\, j_1\cdots j_K}=g_{[i_1 j_1}\cdots g_{i_K] j_K}$$

ガ(I)ノ最初ニノベタ方法デ構成シタモノト一致スルコトガ分ル

結局 AI, AII. AIII ハ BI, BII ト equivalent トナル。

注意 A又ハ BV ナル條件ハ一般ノ L デハ不可能デアル。(ソレニハ條件 AIII ガ効イテクルコトニ注意) 一般 L ニツイテ g_{ij} ノ型ノ基本 tensor ヲ定義スルニハ次ノ様ニ考ヘルノガ自然デハナカラウカ、之ハ矢野先生ノ御注意デアル。対称ナ tensor g^{*ij} ヲ次様ニエラブ。

1° $\quad g^{*ij}L_j^\nu=0$

2° $\quad g^{*\lambda\mu}=(n-K)^{-1}\, g^{*ij}\, L_{ij}^{(\lambda\mu)}$ ノ行列ガ L^2 ニナル。

之カラ $$g^{ij}=g'^{ij}+p^i_\lambda p^j_\mu g^{\lambda\mu}$$

ノ如ク g^{ij} ガ決定サレ、$|g^{ij}|\neq 0$ ナル限リ基本 tensor ヲ定義スル換言スレバ次ノ公理系ヲ満足スル様ニ g^{ij} ヲ定義スルノデアル。

$$\mathrm{CI.}\quad L^2=|g_{\lambda\mu}|.\quad g_{\lambda\mu}=p^i_\lambda p^j_\mu g_{ij}$$

$$\mathrm{CII.}\quad (n-K)g^{ij}=g'^{hk}\left[(n-K)\delta^i_h\delta^j_k+p^i_\lambda p^j_\mu\left\{{\lambda\mu \atop (hk)}\right\}\right]$$

コノ様ナ g^{ij} ハ g'^{ij} ノトリ方デ変ツテクル、又 AV 又ハ BII ハ必ズシモ成立シナイ、併シ

$$\mathrm{CIII.}\quad L^{-1}L^\lambda_i=g_{ij}\,g^{\lambda\mu}p^j_\mu$$

ハ成立スル、従ツテ(II)ノ最後ノ定理ハ次ノ形ニナル。

K次元曲面ハ

$$N^i\equiv g^{\lambda\mu}g^i_j\left(p^j_{\lambda\mu}+\Gamma^j_{hk}p^h_\lambda p^k_\mu+C^{j}{}_{hk}{}^{\nu}p^h_\lambda p^k_\mu\right)$$

ガ曲面上デ0ナルトキニ限リ極小極面トナル。

6° 一点ニ於ケル角計量

n次元 Euclid 空間内ニ二ツノK次元平面 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ガアルトキ $\mathfrak{M}$ 内ニ互ニ垂直ナベクトル $\alpha_{(1)},\cdots,\alpha_{(K)}$, $\mathfrak{N}$ 内ニ互ニ垂直ナベクトル $\gamma_{(1)},\cdots,\gamma_{(K)}$ ヲ適当ニトリ $\alpha_{(i)}$, $\alpha_{(k)}$ ガ相異ル i,k ニ対シ直交スル様ニ出来ル（談話1182. Hilbert 空間ノ angular relation ニツイテ参照）$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ノナス角 θ ハ

$$\cos^2\theta=\cos^2(\alpha_{(1)}\gamma_{(1)})\cdots\cos^2(\alpha_{(K)}\gamma_{(K)})$$

トナル。

今相隣ル二平面 (p). $(p+dp)$ ヲトル。$(p+dp)$ ヲ $E_n(x_p+dp)$ カラ $E_n(p)$ ヘ平行ニ移シタ平面ト (p) トノナス角ヲ $E_n(x,p)$ ノ中デ測ツタモノヲ $d\theta$, 上ノ $(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i)$ ノナス角ヲ $d\theta_\lambda$ トスレバ

$$d\theta^2 = \sum_\lambda d\theta_\lambda^2 = g_{i_1 \cdots i_k, j_1 \cdots j_k} D p^{i_1 \cdots i_k} D p^{j_1 \cdots j_k}$$

$$= L^{-1} L^{(\lambda\ \mu)}_{i\ j}\, dp^i_\lambda\, dp^j_\mu$$

トナル。 (19. 9. 20)

〔談話1181ニ関スル注意〕

２次元ノ球面上ニ円Cガアルトキ、Cノ上ノ四点A,B,C,D順序ヲ次ノ如ク定義シヨウ。

C_1, C_2 ヲ夫々 A,B; C,D ヲ過ギル任意ノ円トスルトキ常ニ $C_1 C_2 > 0$ ナルトキ A,B ハC,D ヲ分ツトイフ。

之ニ関シ普通ノ順序ノ公理ガ成立ツテヰルトスル。

之カラ出ルコトハ我々ノ Körper ガ順序ヅケラレテヰテシカモソノスベテノ正ノ元ガ平方根ヲモツコトデアル。ソレハ $a > 0$ ノ平方根ヲ作図スル普通ノ方法ガ可能トナルカラデアル。

又 Lw デ、任意ノ円Cノ中心ヲ過ギリ、ソノ円ノ平面上ニアル直線ガ、必ズ円ト交ハルコトガ分ル。之ハ実ハ最後ニLw ガ Euclid 空間ナルコトヲ証明スル時ニ、ウツカリ使ツタコトデアツタ。