1184 Finsler 空間ニ於ケル平行ト定點通過

朝長康郎

序. Riemann空間ニ於ケル平行ト定点通過ノ問題ハ佐々木重夫，矢野健太郎両博士ニヨッテ夫々異ル方法デ論ゼラレ面白イ結果ガ多数得ラレタ（佐々木重夫「ほろのみーノ群ガ一点或ハ一方向ヲ不変ニスルりーまん空間ノ構造ニツイテ」日本数学物理学會誌、昭和17年7月号、

K Yano. Sur le parallelisme et concurance dans l'espace de Riemann 帝國学士院記事19(1943) P189〜197.

矢野健太郎「りーまん空間ニ於ケル平行ト定点通過」日本中等教育数学会雑誌第二十五巻第一号昭和18年2月）

筆者ハ矢野先生ノ方法ニ倣ツテ同ジ問題ヲFinsler空間デ取扱ツテ見タ。

§1 Finsler 空間トCartan ノ接続[1]

n次元ノFinsler空間F_nトハ曲線$x^\lambda = x^\lambda(t)$ $(\lambda = 1, 2, \cdots n)$ノ長サガ

$$(1.1) \qquad S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, x')\,dt$$

デアタヘラレルヤウナ　(x^λ, x'^λ)ノ集合体デ$\mathcal{L}(x, x')$ハx'^λニ関シテ1次ノ斉次函数トスル。

$$(1.2) \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 \qquad \text{トオケバ}$$

---

(1) E. Cartan Les espaces de Finsler.

(1.3) $g_{\lambda\mu} = \partial^2 \mathcal{F}/\partial x'^\lambda \partial x'^\mu$

ト書ケル。$g_{\lambda\mu}$ カラ共軛テンソン $g^{\lambda\mu}$ が定義サレル。

(1.4) $g_{\lambda\mu} g^{\lambda\sigma} = \delta_\mu^\sigma$

又

(1.5) $\mathcal{L}^2 = g_{\lambda\mu} x'^\lambda x'^\mu$

(1.6) $C_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial g_{\lambda\mu}/\partial x'^\nu,\quad C_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\pi} C_{\pi\mu\nu}$

ナル テンゾルハ $g_{\lambda\mu}$ が x' ニ関シテ 0 次ノ斉次函数デアルカラ

(1.7) $C_{\lambda\mu\nu} x'^\nu = 0$ トナル。

(1.8) $A_{\lambda\mu\nu} = \mathcal{L} C_{\lambda\mu\nu} \qquad A_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\sigma} A_{\mu\nu\sigma}$

デ定義サレタ A ノハ x' ノ 0 次ノ斉次函数デアル。

(1.9) $2G_\mu = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x'^\mu \partial x^\lambda} x'^\lambda - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu},\quad G^\lambda = g^{\lambda\mu} G_\mu$

(1.10) $$\overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu,\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\pi}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\pi}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\pi}\right) - C_{\mu\pi\sigma}\frac{\partial G^\sigma}{\partial x'^\nu}$$
$$- C_{\nu\pi\sigma}\frac{\partial G^\sigma}{\partial x'^\mu} + C_{\mu\nu\sigma}\frac{\partial G^\sigma}{\partial x'^\pi}$$
$$\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\pi}\, \overset{*}{\Gamma}_{\mu\nu,\pi}$$

ノヤウニ定義スルト $\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\lambda}$ ハ x' ノ 0 次ノ斉次函数デ下ノ指標ニツイテ対称デ座標ノ変換ニ際シクリストッフエルノ記号ノヤウナ変換ヲ受ケル。又次ノヤウナ関係ガアル。

(1.11) $\overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\lambda} x'^\nu = \partial G^\lambda/\partial x'^\mu$

(1.12) $l^\lambda = x'^\lambda/\mathcal{L}(x, x')$ トオケバ

(1.13) $\omega^\lambda = dl^\lambda + \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{\partial G^\lambda}{\partial x^\pi} dx^\pi = dl^\lambda + \overset{*}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\lambda} l^\mu dx^\nu$

ナル ω^λ ハヴエクトル性ヲ有スルパッフ形式デアル。

F_n ノ一要素 (x^λ, x'^λ) ノ近傍ハ (1-5) カラ見ルト計量が

(1.14) $ds^2 = g_{\lambda\mu}(x, x')\, dx^\lambda dx^\mu$

デアタヘラレルヤウナ n 次元ゆーくりつど空間ト考ヘラレル。故ニ F_n ノ各点ヲ $\mathbb{M}$ デ表シ、ゆーくりつど空間ト見做サレタ点 $\mathbb{M}$ ノ近傍ニ $\mathbb{M}$ ノ微小移動 $d\mathbb{M}$ ガ

(1.15) $d\mathbb{M} = \mathbb{e}_\lambda\, dx^\lambda$

デ表ハサレルヤウナ n 個ノ一次獨立ナヴェクトル $\mathbb{e}_\lambda$ (之ヲ $\mathbb{M}$ ニ於ケル自然標構ト呼ビ x'^λ ニ関係スルコトニ注意) ヲトルト $ds^2 = d\mathbb{M}\cdot d\mathbb{M}$ ヨリ

(1.16) $\mathbb{e}_\mu \cdot \mathbb{e}_\nu = g_{\mu\nu}$

デナケレバナラナイ。$\mathbb{M} + d\mathbb{M}$ ノ近傍モ又ゆーくりつど空間ト見做サレルカラ $\mathbb{M}$ ノ近傍ノゆーくりつど空間 ($\mathbb{M}$ ニ於ケル切ゆーくりつど空間) トノ間ニ対應ヲツケルコトが出來ル。ソレニハ $\mathbb{e}_\lambda$ ト $\mathbb{M} + d\mathbb{M}$ ニ於ケル自然標構 $\mathbb{e}_\lambda + d\mathbb{e}_\lambda$ トノ関係ヲ規定スレバヨイ。之ヲ Cartan ニ従ツテ次ノヤウニ決メル。

(1.17) $d\mathbb{e}_\mu = (\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu + A^\lambda_{\mu\nu}\varpi^\nu)\mathbb{e}_\lambda$

(1.15) 及 (1.17) ニヨリ F_n ノ中ノ一ツノ曲線ニ沿ツテ切ゆーくりつど空間ヲ次々ニ重ネテ之ヲ全部同一ノゆーくりつど空間内ニ展開スルコトが出來ル。

勿論ソノ曲線ニ沿ツテ x'^λ モ連続的ニ変化シテ井ナケレバナラナイ。

但シ x'^λ ハ考ヘル曲線ノ dx^λ/dt トハ関係ガナイ。

§2. 平行ヴェクトル場及定点通過ヴェクトル場

F_n ノ一ツノヴェクトル v^λ (簡単ノ為ニ v^λ ハ x' ニ関係ナク、

x丈ノ函数トスル）ヲ切ゆーくりつど空間デ見ルト v^λ $\mathfrak{e}_\lambda$ デアツテ $\mathfrak{e}_\lambda$ ハ x^λ ニ関係スルカラ x^λ ヲ v^λ ソノモノニ選ブト $\mathfrak{e}_\lambda$ モ x丈デ決マル。

コノヤウナヴエクトル場ヲ或ル曲線 $x^\lambda=x^\lambda(t)$ ニ沿ツテ§1ノ意味デ展開シタトキ点 $\mathbb{M}$ ニ於ケル切ゆーくりつど空間内ニ現レルソレ等ノ像ガ常ニ互ニ平行ダト謂フノナラ、(1.7)ノ関係ニ注意スレバ

$$\frac{d}{dt}(v^\lambda\mathfrak{e}_\lambda)=\left(\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}v^\mu\right)\frac{dx^\nu}{dt}\mathfrak{e}_\lambda=0$$

デナケレバナラナイ。即チ

$$(2.1)\quad \left(\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}(x,v)\,v^\mu\right)\frac{dx^\nu}{dt}=0$$

如何ナル曲線デモト云フノナラ v^λ ハ次ノ関係ヲ満足シナケレバナラヌ。

$$(2.2)\quad \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}(x,v)\,v^\mu=0$$

逆ニ(2.2)ヲ満足スル v^λ カラ $v^\lambda\mathfrak{e}_\lambda(x,v)$ ヲ造レバ、之ハ F_n 内ノ如何ナル曲線ニ沿ツテ切ゆーくりつど空間内ニ展開シテモ常ニ平行ナヴエクトルヲ与ヘル。定点通過ノ場合ハ切ゆーくりつど空間内ノ $\mathbb{M}+v^\lambda\mathfrak{e}_\lambda$ ナル点ガ動カナイノダカラ

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{M}+v^\lambda\mathfrak{e}_\lambda)=\left\{\frac{dx^\lambda}{dt}+\left(\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}(x,v)\,v^\mu\right)\frac{dx^\nu}{dt}\right\}\mathfrak{e}_\lambda=0$$

即チ

$$(2.3)\qquad \left(\delta_\nu^\lambda+\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}(x,v)\,v^\mu\right)\frac{dx^\nu}{dt}=0$$

如何ナル曲線ニ沿ツテモト云フノナラ

$$(2.4)\quad \delta^\lambda_\nu+\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}(x,v)v^\mu=0$$

逆ニ(2.4)ヲ滿足スルv^λカラ造ッタヴエクトルv^λ $e_\lambda(x,v)$ハF_nノ如何ナル曲線ニ沿ツテ切ゆーくりつど.空間内ニ展開シテモ定点ヲ通ル。又平行ノ場合デモ定点通過ノ場合デモv^λヲ切線トスル曲線ガ測地線$dl^\lambda/ds+G^\lambda(x,l)=0$.(Sハ曲線ノ弧長)トナルコトガ容易ニ證明サレル。本節デ述ベタヤウナ意味ノ平行,定点通過ヲ夫々「狹義ノ平行」,「狹義ノ定点通過」ト呼ブコトニスレバ

定理. n次元ノFinsler空間ガ一ツノ狹義ノ平行及定点通過ヴエクトル場ヲ許容スル爲ノ必要充分條件ハ夫々

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}(x,v)v^\mu=0$$

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu}+\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}(x,v)v^\mu+\delta^\lambda_\nu=0$$

ヲ滿足スルヴエクトル場$v^\lambda=v^\lambda(x)$ガ存在スルコトデアル。 ガ得ラレル。

§3 超曲面上ニ誘導サレタ接続

F_nノ中ニソノパラメーター表示ガ$x^\lambda=x^\lambda(y^1\ldots y^{n-1})$デアタヘラレルヤウナ超曲面$V_{n-1}$ヲトル。$\partial x^\lambda/\partial y^i=\varepsilon^\lambda_i$, $\dfrac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^i\partial y^j}=\varepsilon^\lambda_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots n-1)$ノヤウニ書クコトニスル。V_{n-1}ノ法線ヴエクトルn^λハtransversalノ條件カラ次ノヤウニ決定サレル。

$$(3.1)\quad g_{\lambda\mu}(x,n)n^\lambda\varepsilon^\mu_i=0,\quad g_{\lambda\mu}(x,n)n^\lambda n^\mu=1$$

トスルト　$t_\lambda = g_{\lambda\sigma}(x, n) n^\sigma$

$g_{ij} = g_{\lambda\mu}(x, n) \xi_i^\lambda \xi_j^\mu$,　$g^{is} g_{sj} = \delta_j^i$

$\xi_\lambda^i = g^{ij} g_{\lambda\mu}(x, n) \xi_j^\mu$ ノヤウニシテ $t_\lambda, \xi_\lambda^i, g_{ij}, g^{ij}$ ガ導カレルコトハ Riemann 空間ノ場合ト同ジデ

$$\xi_\lambda^i \xi_i^\sigma = \delta_\lambda^\sigma - n^\sigma t_\lambda$$

ナル関係ガアル。(3.1) ヲ V_{n-1} ニ沿ツテズ′ヲ n^λ　ト

シテ共変微分スレバ

(3.2)　$t_\lambda D \xi_i^\lambda = H_{ij} dy^j$

(3.3)　$Dn^\lambda = -\xi_i^\lambda H_{\cdot j}^{i} dy^j = \left(\frac{\partial n^\lambda}{\partial y^j} + \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} n^\mu \xi_j^\nu\right) dy^j$

(茲ニ $H_j^i = g^{ai} H_{aj}$) ノヤウナ公式ヲ得ル。今後用ヒラレルズ′ヲ含ム量ハ凡テズ′ヲ n デ置キ換ヘタモノトスル。

X^λ ヲ V_{n-1} ニ属スルヴエクトル即チ $X^\lambda = \xi_i^\lambda X^i$ ト書ケルト

(3.4)　$DX^i = \xi_\lambda^i DX^\lambda$

ト定義スルコトニヨリ V_{n-1} 上ニ一ツノ接続ガ誘導サレル右辺ノ D ハ勿論 V_{n-1} ニ沿フ微分デアル。

$n^\lambda A_{\lambda\mu\nu} = 0$　即チ $t_\lambda A^\lambda_{\mu\nu} = 0$ ナルヲ以テ

$A^\lambda_{\alpha\beta} \xi_i^\alpha \xi_j^\beta = \xi_s^\lambda A^s_{ij}$ ノヤウナ A^s_{ij} ガ存在スル。

$DX^\lambda = \left(\frac{\partial X^\kappa}{\partial y^i} + \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} X^\mu \xi_i^\nu\right) dy^i + A^\lambda_{\mu\nu} X^\mu D n^\lambda$

$= \left\{ \xi_i^\lambda \frac{\partial X^i}{\partial y^k} + \left(\xi_{jk}^\lambda + \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} \xi_j^\alpha \xi_k^\beta - \xi_s^\lambda A^s_{jm} H^{\cdot m}_{k}\right) X^j \right\} dy^k$

デアルカラ次ノ公式ヲ得ル。

(3.5)　$DX^i = dX^i + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} X^j dy^k$

(3.6)　$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = \xi_\lambda^i \left(\xi_{jk}^\lambda + \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} \xi_j^\alpha \xi_k^\beta\right) - A^i_{jm} H^{\cdot m}_{k}$

玆ニ表レタ $\check{\Gamma}^i_{jk}$ ハ j ノ k ニ就テ必シモ対稱デナイ。

$$(3\cdot7)\qquad \check{\Gamma}^i_{jk}-\check{\Gamma}^i_{kj}=A^i_{km}H^{\cdot m}_{j}-A^i_{jm}H^{\cdot m}_{k}$$

他方 g_{ij} カラ造ツタくりすとつふえる記号 $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ ヲ計算スルト、

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\xi^\gamma_k\xi^\alpha_i\xi^\beta_j+2C_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial n^\gamma}{\partial y^k}\xi^\alpha_i\xi^\beta_j+g_{\alpha\beta}\xi^\alpha_i\xi^\beta_{jk}$$
$$+g_{\alpha\beta}\xi^\alpha_{ik}\xi^\beta_j$$

$$[ij,k]=[\alpha\beta,\gamma]\xi^\alpha_i\xi^\beta_j\xi^\gamma_k+g_{\alpha\beta}\xi^\beta_k\xi^\alpha_{ij}+C_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial n^\alpha}{\partial y^i}\xi^\beta_j\xi^\gamma_k$$
$$+C_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha_i\xi^\beta_k\frac{\partial n^\gamma}{\partial y^j}-C_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha_i\xi^\beta_j\frac{\partial n^\gamma}{\partial y^k}$$

$$=[\alpha\beta\gamma]\xi^\alpha_i\xi^\beta_j\xi^\gamma_k+g_{\alpha\gamma}\xi^\alpha_{ij}\xi^\gamma_k-C_{\gamma\beta\pi}\xi^\gamma_k\xi^\beta_j\left(\xi^\pi_s H^{\cdot s}_{i}+\frac{\partial G^\pi}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha_i\right)$$
$$-C_{\beta\gamma\pi}\xi^\gamma_k\xi^\beta_i\left(\xi^\pi_s H^{\cdot s}_{j}+\frac{\partial G^\pi}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha_j\right)$$
$$+C_{\alpha\beta\pi}\xi^\alpha_i\xi^\beta_j\left(\xi^\pi_s H^{\cdot s}_{k}+\frac{\partial G^\pi}{\partial x^\gamma}\xi^\gamma_k\right)$$

$$(3\cdot8)\quad \left\{ {l \atop ij} \right\}=\xi^l_\gamma\left(\check{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\xi^\alpha_i\xi^\beta_j+\xi^\gamma_{ij}\right)-A^l_{im}H^{\cdot m}_{j}-A^l_{jm}H^{\cdot m}_{i}+A_{ijm}H^{mk}$$

玆ニ　　$H^{mk}=g^{ak}H^{\cdot m}_{a}$　　トス。

(3·6)ト(3·8)カラ $\check{\Gamma}$ ト $\{\ \}$ トノ関係ガ分ル。

$$(3\cdot9)\qquad \check{\Gamma}^i_{jk}=\left\{ {i \atop jk} \right\}+A^i_{km}H^{\cdot m}_{j}-A^{\ m}_{kj}H^{\cdot i}_{m}$$

又　$D\xi^\lambda_i=\left(\xi^\lambda_{ik}+\check{\Gamma}^\lambda_{\pi\sigma}\xi^\sigma_i\xi^\pi_k\right)dy^k+A^\lambda_{\pi\sigma}\xi^\sigma_i Dn^\pi$　カラ

$$(3\cdot10)\qquad H_{ij}=t_\lambda\left(\xi^\lambda_{ij}+\check{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}\xi^\alpha_i\xi^\beta_j\right)$$

従ツテ次ノ公式ヲ得ル。

$$(3\cdot11)\qquad DX^\lambda=\xi^\lambda_i DX^i+n^\lambda H_{ij}X^i dy^j$$

到ル所 $H_{ij}=0$ ナル V_{n-1} ヲ全測地的超曲面ト呼ブナラバ

全測地的超面ニ切スルーツノヴェクトルヲ外ノ空間 F_n ニ於

テ曲面ニ沿ツテ平行移動スレバ、結果ハ猶曲面ニ切シテ居リシカモ曲面ニ於テモ平行デアルトイフ定理ガ成立スル。

到ル所 $H_{ij} = \rho g_{ij}$ ナル V_{n-1} ヲ全臍超曲面ト呼ブコトニスレバ（殊ニ ρ ガ常数ナル場合ヲ固有全臍超曲面ト呼ブ）全測地的 V_{n-1} ニ沿ツテハ法線ヴエクトルガ狹義ノ平行ニ動キ固有全臍 V_{n-1} ニ沿ツテハ法線ヴエクトルガ狹義ノ定点通過ヲシテヰル　コトガ（3.3）カラ分ル、即チ後ノ場合ハ

$H_{\cdot j}^{i} = \delta_j^i \rho$　　　　ρ ＝定数デアルカラ

$$Dn^\lambda = -\rho \xi_i^\lambda dy^i = -\rho dx^\lambda$$

$$D(n^\lambda/\rho) + dx^\lambda = 0$$

即ナ　$\frac{1}{\rho} n^\lambda$　ナルヴエクトル　ノ端ガ定点トナツテヰル。

$\frac{1}{\rho}$　ヲ固有全臍超曲面ノ半径ト呼ブコトニスル。

§4　狹義ノ平行及定点通過ヴエクトル場ヲ許容スル F_n　ノ構造。　狹義ノ平行ヴエクトル場 v^λ ガ存在スルトキ $g_{\lambda\mu}(x, v) v^\lambda = v_\mu$　トオクト $g_{\lambda\mu}$ ノ絶対微分ハ 0 デアルカラ（2.2）カラ

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma^{*\sigma}_{\lambda\nu}(x, v) v_\sigma = 0$$

コヽデλトνヲ入レ替ヘテ相減ズレバ $\Gamma^{*\sigma}_{\lambda\nu} = \Gamma^{*\sigma}_{\nu\lambda}$　デアルカラ、

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\lambda} = 0$$

即チ

(4.1) $$v_\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda}$$

ノヤウナ　スカラー φ ガ存在スル。

(4.1)ハ　φ＝定数ナル V_{n-1} ニ対シテ v^λ ガ §3 ノ意味デ垂直ナルコトヲ示ス。コノ V_{n-1} ノ法線ヴェクトルヲ n^λ トスルト n^λ ガ又狭義ノ平行ヴェクトル場ヲ造ルカラ

$$Dn^\lambda = 0, \quad \text{即チ} \quad H_{ij} = 0 \quad \text{トナリ。}$$

V_{n-1} ハ全測地的超曲面ナルコトガ知レル。又狭義ノ定点通過ヴェクトル場 v^λ ガ存在スルトキハ

$$g_{\lambda\mu}(x, v)\, v^\lambda = v_\mu \quad \text{トオクトキ (2.4) カラ}$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \overset{*}{\Gamma}{}_{\lambda\nu}^{\sigma}(x, v)\, v_\sigma + g_{\lambda\nu}(x, v) = 0$$

ガ導カレ此ノ場合モ

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\lambda} = 0 \qquad \text{即チ } v_\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} \text{ ナル　スカラー } \varphi$$

ガ存在スル。　φ＝定数ナル V_{n-1} ノ法線ヴェクトルヲ n^λ トスレバ前ト同様ニ　$v^\lambda = \rho n^\lambda$ ト書イテ之ヲ (2.3) ニ代入スルト

$$dx^\lambda + n^\lambda d\rho + \rho D n^\lambda = 0$$

$dx^\lambda = \xi_i^\lambda dy^i$, $Dn^\lambda = -\xi_i^\lambda H_j^i dy^j$ デアルカラ V_{n-1} ニ沿ツテハ　$d\rho = 0$, 即チ　ρ ＝定数及ビ

$$H_j^i = \frac{1}{\rho}\delta_j^i$$

即チコノ V_{n-1} ハ固有全臍超曲面デアル。又 (3.9) ヨリ $\overset{*}{\Gamma}{}_{jk}^{i} = \left\{ {i \atop jk} \right\}$ トナルカラ V_{n-1} ニ誘導サレタ接続ハ Riemann

式トナル。逆ニF_nノ中ニ其ノ直截曲線ガ測地線トナッテキルヤウナ∞'，全測地的超曲面ノ群ガ存在スルトキハ、夫等ノ法線ノ方向ニ向フヴェクトルハ自身ノ方向ニハ勿論狹義ノ平行ニ動キ　ソレニ垂直ナ全測地的超曲面ニ沿ッテモ又狹義ノ平行デアルカラn個ノ獨立ナ方向ニ狹義ノ平行デアル。從ッテ狹義ノ平行ヴェクトル場ヲ造ル。又F_nノ中ニ其ノ直截曲線ガ測地線トナッテキル∞'ノ固有全臍超曲面ノ群ガ存在シ、ソレ等ノ二ツニハサマレタ測地線ノ部分ノ長サガ半径ノ差ニ等シイトキハ、夫等ノ法線ノ方向ニ向フヴェクトルハ自身ノ方向ニハ勿論狹義ノ定点通過デ、直交スル固有全臍曲面ニ沿ッテモ狹義ノ定点通過デ、ソノ定点ガ∞ノコレ等全臍超曲面ニ就テ同一点トナルカラ結局n個ノ獨立ナ方向ニ狹義ノ定点通過デF_nノ中デ狹義ノ定点通過ヴェクトル場ヲ形成スル。

由テ次ノ定理ヲ得ル。

定理4.1　　F_nガ一ツノ狹義ノ平行ヴェクトル場ヲ許容スル爲メノ必要充分條件ハF_nガソノ直截曲線ガ測地線トナルヤウナ∞'個ノ全測地的超曲面ノ群ヲ含ムコトデアル。

定理4.2　　F_nガ一ツノ狹義ノ定点通過ヴェクトル場ヲ許容スルタメノ必要充分條件ハF_nガ其ノ直截曲線ガ測地線トナリ、ソノ任意二ツニハサマレタ測地線ノ部分ノ長サガ両者ノ半径ノ差ニ等シイベウナ∞'個ノ固有全臍曲面ノ群ヲ含ムコトデアル。

—(終)—