1180 σ－完備ベクトル束ニ於ケル區間系ニ就テ

宮崎　貞孝（東北）

區間系ノ理論ハ Denjoy積分ノ基礎トシテ重要デアルガ、此處デハ結合束種論ノ應用トシテσ－完備ベクトル束ニ於ケル區間系ノ理論ヲ展開スル。以下ニ引用スル文獻ハ

中野秀五郎氏： Abstract spectral theory 位相數學　第四巻第一号（昭和十六年十一月）

宮崎貞孝： 結合束種ニ於ケル局所主イデアールトBoole代數ニ就テ、　全國紙上數學談話會　第256号（昭和十八年八月）

デアルガ前者ハ中野定理3.16, 後者ハ宮崎定理3.1ノ如クニ引用スル。尚ホ結合束種ニ就テハ S. Miyazaki: Verbandart, 數物記事, 第25巻（1943）ヲ參照サレタイ。

定義1. σ－完備ベクトル束Mニ於テ

$a \leqq x \leqq b$ ヲ滿足スル元xノ總テノ集合ヲ閉區間ト云ヒ、$[a, b]$ デ表ハス。

Mニ於テ $a+b=c+d$ ナルトキ

(a, b, c, d) ト置イテ結合束種ヲ導入スル。

(a, b, c, p) ナルトキ $a \underset{p}{+} b = c$ 又ハ $a+b=c$ (p) ト置イテ、更ニ $\alpha(a-p)+p$ ナル演算ヲ $\alpha_p a$ デ表ハセバ、Mノ元ハ $a \underset{p}{+} b = c$ 及ビ $\alpha_p a$ ナル演算ニ關シテ、

ノ本来ノベクトル束ト同型ナルヲ零元トスル σ- 完備ベクトル束ヲナス。 但シ此処ニ α ハ實数トスル。

定義2. $a \leqq b$ ナルトキ $|a|_p \frown |b|_p = p$ ヲ満足スル元，即チ a, b ノ直交因子ヲ $[a, b]$ ノ端元ト云フ。$[a, b]$ ノ総テノ端元ノ集合ヲ $\mathfrak{B}(a, b)$ デ表ス。

定義3. $[a, b]$ ノ端元ヲ c, d トスルトキ $\mathfrak{B}(a, b) \neq \mathfrak{B}(c, d)$ ナラバ $[c \frown d, c \smile d]$ ヲ $[a, b]$ ノ邊區間ト云フ。$[a, b]$ ノ如何ナル邊區間ニモ属セザル元ヲ $[a, b]$ ノ内元ト云ヒ，$[a, b]$ ノ内元ノ総テノ集合ヲ (a, b) デ表ハシ開區間ト云フ。

以上ヨリ開區間ノ分割ニ関シテ次ノ定理ガ成立スル。

定理 $[a, b]$ ヲ内元 c ヲ含ム閉區間トスルトキ、次ノ條件ヲ満足スル閉區間系 Δ ガ存在スル。

1° Δ ニ属スル閉區間ハ総テ (a, b) ニ含マレル。

2° Δ ニ属スル閉區間ハ c ヲ端元トスル。

3° Δ ニ属スル相異ナル閉區間 Δ_k, Δ_l ノ共通部分ハ Δ_k 及ビ Δ_l ノ辺區間デアル。

4° (a, b) ノ任意ノ元ヲ含ム様ナ Δ ニ属スル閉區間ガ少クトモ一ツ存在スル。

此ノ定理ヲ證明スル為ニ必要ナ補題ヲ次ニ順次述ベル。

補題1. $\mathfrak{B}(a, b)$ ハ a, b ヲ夫々最小元、最大元トスル Boole 代数ヲナス。

證 コレハ宮崎定理4.1デアルガ、此ノ部分ガ欠ケテキルノデ此処ニ補ッテ置ク。一般ニ a b ノ間ニ順序関係ガ

必ズシモナイ場合ニハ $\mathfrak{B}(a,b)$ ハ $a\frown b$. $a\smile b$ ヲ夫々最小元、最大元トスル Boole 代数ヲナス。何故ナラバ、a, b, ノ直交因子ヲ c, d トスレバ, $c\frown d$, $c\smile d$ ノ c, d ノ直交因子デアルカラ、宮崎定理 3.3 ニ依リ a, b ノ直交因子ト成ル。依リテ $\mathfrak{B}(a,b)$ ハ部分束ヲナス。且ツコレハ分配束デアル。次ニ任意ノ $p\in\mathfrak{B}(a,b)$ ニ対シテ $(a,b,p,q)_R$ ナル q ヲトレバ $p\frown q$ ハ a, b ノ直交因子デアルカラ

$|a|_{p\frown q}\frown|b|_{p\frown q}=p\frown q$. 然ルニ $|a|_{p\frown q}\geqq a$,

$|b|_{p\frown q}\geqq b$ デアルカラ $p\frown q\geqq a\frown b$.

又 $a\frown b$ ハ p, q ノ直交因子ト成ルカラ同様ニシテ $a\frown b$ $\geqq p\frown q$. コレヨリ $p\frown q=a\frown b$.

次ニ (a,b,p,q) ヨリ $(a\frown b, a\smile b, p\frown q, p\smile q)$ トナルカラ $p\smile q=a\smile b$ トナリ q ハ p ノ補元デアル。

補題 2. $[c\frown d, c\smile d]$ ガ $[a,b]$ ノ辺區間デアルタメノ必要ニシテ且充分ナル條件ハ、c, d ガ $[a,b]$ ノ端元デ $c\frown d\neq a$, $c\smile d\neq b$ ノ中少クトモ一ツガ成立スルコトデアル。

證. $[c\frown d, c\smile d]$ ガ $[a,b]$ ノ辺區間トスレバ、定義ヨリ $e, f\in\mathfrak{B}(a,b)$, $\mathfrak{B}(e,f)\neq\mathfrak{B}(a,b)$, $e\frown f=c\frown d$, $e\smile f=c\smile d$ ナル e, f ガ存在スル。補題 1 ニ依リ $e\frown f$, $e\smile f$ ハ $[a,b]$ ノ端元デアルカラ、宮崎定理 3.5, 3.6 ヨリ c, d ハ $c\frown d$, $c\smile d$ ノ直交因子デアルコトヨリ c, d モ $[a,b]$ ノ端元ト成ル。次ニ若シ $c\frown d=a$, $c\smile d=b$ トスレバ $(a,b,c,d)_R$ ト成ルカラ、$(c,d,e,f)_R$ ヨリ $(a,b,e,f)_R$ トナリ、宮崎定理 4.2 ヨリ $\mathfrak{B}(a,b)=\mathfrak{B}(e,f)$

トナルカラ $c \frown d \neq a$, $c \smile d \neq b$ ノ中少クトモ一ツハ成立シナケレバナラナイ。

逆ニ c, d ガ $[a, b]$ ノ端元デ $\mathfrak{B}(a, b) = \mathfrak{B}(c, d)$ ナラバ $c \frown d = a$, $c \smile d = b$ ヲ得ルカラ, $c \frown d \neq a$, $c \smile d \neq b$ ノ中少クトモ一ツガ成立スレバ $\mathfrak{B}(a, b) \neq \mathfrak{B}(c, d)$ トナル。

補題 3. $[a, b]$ ノ辺區间ノ辺區间ハ $[a, b]$ ノ辺區间デアル。

補題 4. $[a. b]$ ノ端元、辺區间ハ $[a. b]$ ニ含マレル。

補題 5. 二ツノ閉區间 $[a, b]$, $[c, d]$ ガ共通元ヲ有スルタメノ完全條件ハ $a \smile c \leqq b \frown d$ デ、其ノ共通元ノ総テノ集合ハ閉區间 $[a \smile c, b \frown d]$ デアル。

補題 6. p ガ a ト c, a ト e トノ直交因子デ $f \in \mathfrak{B}(c, e)$ ナラバ, p ハ a ト f トノ直交因子デアル。

證 $|a| \frown |c| = p$, $|a| \frown |e| = p$ (p)

ヨリ $|a| \frown |e - c| = p$ (p)

$$g = a \underset{p}{+} c \quad \text{ト置ケバ} \quad |g - c| \frown |e - c| = p \quad (p)$$

即チ $|g|_c \frown |e|_c = c$ (宮崎定理 3.1)

コレヨリ $|g|_c \frown |f|_c = c$ 即チ

$|a| \frown |f - c| = p$ (p)

コレヨリ $|a|_p \frown |f|_p = p$ ヲ得ル。

補題 7. $x = P_{\underset{c}{b}}\, a \ (= P_{bc}\, a)$ デアルタメノ完全條件ハ $x \in \mathfrak{B}(a, b)$, $x \in \mathfrak{B}(a, c)$, $x \in \mathfrak{B}(b, c)$ ガ同時ニ成立スルコトデアル。

證 $|a - P_b a| \frown |b| = c$ (c),

$|a - P_b a| \frown |P_b a| = c$ (c)

ヨリ $|a - P_c a| \frown |b - P_c a| = c$　　(c)

ガ成立スルカラ　$P_c a \in \mathfrak{B}(a, b)$　後ハ中野定理5·3及ビ宮崎定理5·1, 6·2　ヨリ證明サレル。

補題8.　$c \in (a, b)'$ デアルタメノ完全條件ハ $c \in [a, b]$ デ $p \in [a, b]$, $p \neq a$ ナルトキ $c \frown p \neq a$ デ、$q \in [a, b]$, $q \neq b$ ナルトキ $c \smile q \neq b$ デアルコトデアル。

次ニ愈々本定理ヲ證明スル。

證明　$[a, b]$ ノ端元ヲ l トスルトキ、$\{l \frown c, l \smile c\}$ ノナス閉區間系 Δ ハ條件 1°, 2°, 3°, 4° ヲ滿足スル。此處ニ l ハ $[a, b]$ ノ總テノ端元ヲトルモノトスル。

Δ ガ條件 1°, 2° ヲ滿足スルコトハ容易ニ證明サレルカラ條件 3° ヲ滿足スルコトヲ證明シヤウ。

$[a, b]$ ノ相異ナル端元ヲ h, l トスルトキ、$[h \frown c, h \smile c]$, $[l \frown c, l \smile c]$ ノ共通部分ハ c ヲ含ム閉區間 $[(h \frown c) \smile (l \frown c), (h \smile c) \frown (l \smile c)]$ 即チ $[c \frown (h \smile l), c \smile (h \frown l)]$ デアル。（補題5.）　故ニ先ヅ $c \smile (h \frown l)$ ガ $h \frown c$, $h \smile c$ ノ直交因子デアルコトヲ證明スル。

h, $h \frown l$ ハ共ニ a, b ノ直交因子デ $h \geqq h \frown l \geqq a$ デアルカラ、$h \frown l$ ハ h ト a トノ直交因子デアル。（中野定理5.8）依ツテ $h \frown l = P_{h, h \frown l}\, a$（宮崎定理6·3）故ニ　$(h \frown l) \smile c = (P_{h, h \frown l}\, a) \smile c \leqq P_{h, h \frown l}\, c) \smile c$.
又 $P_{h, h \frown l}\, c$ ハ c ト $h \frown l$ トノ直交因子デアルカラ $(h \frown l) \smile c \geqq (P_{h, h \frown l}\, c) \smile c$.　從ツテ $(h \frown l) \smile c = (P_{h, h \frown l}\, c) \smile c$.

コレヨリ $(k\frown l)\smile c$ ハ k ト c トノ直交因子トナリ、従ッテ $k\frown c$, $k\smile c$ ノ直交因子トナル、同様ニ $c\frown(k\smile l)$ モ $k\frown c$, $k\smile c$ ノ直交因子トナル。

次ニ $\{c\frown(k\smile l), c\smile(k\frown l)\}$ ガ $\{k\frown c, k\smile c\}$ ノ辺區間デナイトスレバ補題2ニ依リ

$$c\frown(k\smile l)=k\frown c,\quad c\smile(k\frown l)=k\smile c.$$

コレヨリ $c\frown l \leqq k \leqq c\smile l$ ヲ得ル、従ッテ中野定理3.15ヨリ

$$P_{a(c\frown l)}k \leqq P_{ak}\, b \leqq P_{a(c\smile l)}\, b$$

ヲ得ル。然ルニ $P_{a(c\frown l)}\, b = l$, $P_{ak}\, b = k$

ヨリ $l \leqq k$ トナル。同様ニ

$$P_{b(c\frown l)}\, a \leqq P_{bk'}a \leqq P_{b(c\smile l)}\, a$$

ヨリ $k \leqq l$ トナルカラ $k = l$ トナリ假設ニ反スル、故ニ $\{c\frown(k\smile l), c\smile(k\frown l)\}$ ハ $\{k\frown c, k\smile c\}$ ノ辺區間デアラネバナラナイ。

次ニ條件4ノ成立スルコトヲ證明スル、

$\{a, b\}$ ニ屬スル任意ノ元 d ニ對シテ

$$P_{a(P_{c,c\frown d}\, a)}\, b = l$$

ト置ケバ d ハ $\{l\frown c, l\smile c\}$ ニ含マレル。

以下コレヲ證明スル。

l ガ $\{a, b\}$ ノ端元デアルコトハ明カデアル。

中野定理3.10後半ヨリ $b, c \geqq a$ ニ注意シテ

$$l\frown c = \{P_{a(P_{c,c\frown d}\, a)}\, b\}\frown c = P_{a(P_{c,c\frown d}\, a)}(b\frown c)$$
$$= P_{a(P_{c,c\frown d}\, a)}\, c = P_{c,c\frown d}\, a.$$

$$c\frown d = P_{c,c\frown d}\, d \geqq P_{c,c\frown d}\, a = l\frown c$$

ヨリ　$d \geqq l\frown c$

同様ニ $P_k(P_{c,c\frown d}\, b)\, a = k$　ト置ケバ

$k\frown c = P_{c,c\frown d}\, b$ デ $k\frown c \geqq d$ トナル。

次ニ　$l\frown c \geqq k\frown c$　ヲ證明スル。其ノ爲ニ先ヅ

$l\frown c = b \sqsubset P_{c,c\frown d}\, b$ ナルコトヲ證スル。

$(b \sqsubset P_{c,c\frown d}\, b) \frac{+}{c} P_{c,c\frown d}\, a = l'$

ト置ケバ $(b,\ P_{c,c\frown d}\, a,\ P_{c,c\frown d}\, b,\ l')$ デアル。$P_{c,c\frown d}\, b$ ハ b ト c, b ト $c\frown d$ トノ直交因子デ $P_{c,c\frown d}\, a \in \mathfrak{A}_{(c,c\frown d)}$ デアルカラ、補題6ニ依リ $P_{c,c\frown d}\, b$ ハ b ト $P_{c,c\frown d}\, a$ トノ直交因子デアル，從ツテ宮崎定理3.4ヨリ l' モ b ト $P_{c,c\frown d}\, a$ トノ直交因子デアル。從ツテ

$$(b,\ P_{c,c\frown d}\, a,\ P_{c,c\frown d}\, b,\ l')_k$$

同様ニ　$(a,\ P_{c,c\frown d}\, b,\ P_{c,c\frown d}\, a,\ m')_k$

ト置ケルカラ宮崎定理3.8カラ

$(a,\ b,\ l',\ m')_k$ ト成リ，l' ハ a ト b トノ直交因子デアル。

次ニ $(b \sqsubset P_{c,c\frown d}\, b) \frac{\perp}{c} (c\frown d)$　デアリ

$P_{c,c\frown d}\, a \in \mathfrak{A}_{(c,c\frown d)}$ デアルコトカラ

$(b \sqsubset P_{c,c\frown d}\, b) \frac{\perp}{c} P_{c,c\frown d}\, a$.　更ニ

$c \in (a, b)$ ニ注意スレバ

$b \sqsubset P_{c,c\frown d}\, b$ ハ $\mathfrak{A}_{\{c,(a \sqsubset P_{c,c\frown d}\, a)\}}$

ニ属スルコトガ分ル。依ツテ

$$|x|_a \frown |P_{c,c\frown d}\, a|_a = a$$

トスレバ

$$|x-a| \frown |P_{c,c\frown d}\, a - a| = c \qquad (c)$$

ヲ得ルカラ，

$$|x-a| \frown |b - P_{c,c\frown d}\, b| = c \qquad (c)$$

ガ成立スル。コレヨリ

$$|x-a| \frown |b - P_{c,c\frown d}\, b + P_{c,c\frown d}\, a - a| = c \qquad (c)$$

然ルニ　$\ell' = b - P_{c,c\frown d}\, b + P_{c,c\frown d}\, a \qquad (c)$

ヨリ　$|x-a| \frown |\ell' - a| = c \qquad (c)$

即チ　$|x|_a \frown |\ell'|_a = a$　ト成リ

$$\ell' \in \mathfrak{M}_{\{a,(P_{c,c\frown d}\, a)\}}$$

トナル、従ツテ補題7ヨリ

$\ell' = \ell$　ガ得ラレル。

$$P_{c,c\frown d}\, a = \ell \frown c. \quad b \underset{c}{-} P_{c,c\frown d}\, b \underset{c}{+} P_{c,c\frown d}\, a = \ell$$

ヨリ　$b \underset{c}{-} P_{c,c\frown d}\, b = \ell \smile c$

ヲ得ル。而シテ　$(c\frown d) \underset{c}{\perp} (c\smile d)$　デアルカラ、中野定理3.17　ニ依リ

$$P_{c,c\frown d}\, \ell \underset{c}{+} P_{c,c\frown d}\, b = P_{\{c,(c\frown d + c\smile d)\}}\, b \leqq b.$$

故ニ

$$b \underset{c}{-} P_{c,c\frown d}\, b \geqq P_{c,c\frown d}\, b$$

即チ　$\ell \smile c \geqq k \smile c.$

以上ヨリ

$\ell \smile c \geqq d \geqq \ell \frown c$　トナリ

$$d \in [\ell \frown c,\ \ell \smile c]$$

－以上－