1172. 發散積分ニ關スル一定理

角谷 靜夫（阪大）

（定理） $f(t)$, $g(t)$ ガ何レモ $0 \leqq t \leqq 1$ ナル實數ノ區間 T ニテ定義サレタ實數値ノ可測函數ニテ $f(t) \geqq 0$, $g(t) \geqq 0$ ガ T 上ニテ成立スルモノトスル。但シ $f(t)$, $g(t)$ ガ T 上ニテ積分可能デアルト云フコトハ假定シナイ。然ルトキハ

$$(1) \quad \int_E f(t)\,dt < \infty \longrightarrow \int_E g(t)\,dt < \infty$$

ガ任意ノ T ノ可測部分集合 E ニ對シテ成立スルタメニ必要且十分ナ條件ハ

$$(2) \quad g(t) \leqq K f(t) + h(t)$$

ガスベテノ $t \in T$ ニ対シテ成立スル如キ常數 K ト T 上デ定義サレタ実數値ノ<u>可積分</u>可測函數 $h(t)$ ニテ T 上ニテ $h(t) \geqq 0$ トナルモノガ存在スルコトデアル。——————

（証明） 上ノ條件ガ十分デアルコトハ明カデアルカラ必要ナルコトノミヲ証明スル。コノタメ先ヅ

$$(3) \quad \int_E f(t)\,dt \leqq 1 \longrightarrow \int_E g(t)\,dt \leqq K$$

ガ任意ノ T ノ可測部分集合ニ対シテ成立スル如キ常數 K ガ存在スルコトヲ示サウ。

實際若シ (3) ヲ滿足サレルKガ存在シナイナラバ

$$(4)\quad \int_{E_n} f(t)\,dt \leqq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{E_k} g(t)\,dt + 2^n < \int_{E_n} g(t)\,dt < \infty$$

トナル如キ T ノ可測部分集合ノ系列 $\{E_n \mid n=1,2,\cdots\cdots\}$ ガ存在スル筈デアル。

$$(5)\quad E'_n = E_n - E_n \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$$

ト置ケバ $\{E'_n \mid n=1,2,\cdots\cdots\}$ ハ互ニ共通点ナク且ツ明カニ

$$(6)\quad \int_{E'_n} f(t)\,dt \leqq 1, \quad 2^n < \int_{E'_n} g(t)\,dt < \infty$$

ガ $n=1,2,\cdots\cdots$ ニ對シテ成立スル。次ニ各 n ノ E'_n ヲ 2^n 個ノ互ニ共通点ノナイ可測集合 $\{E''_{n,i} \mid i=1,\cdots\cdots,2^n\}$ ニ分チ

$$(7)\quad \int_{E''_{n,i}} g(t)\,dt > 1, \quad i=1,\cdots\cdots,2^n$$

ナラシメル。然ルトキハ少クトモ一ツノ $i=i_n\ (1 \leqq i_n \leqq 2^n)$ ニ對シテ

$$(8)\quad \int_{E''_{n,i_n}} f(t)\,dt \leqq \frac{1}{2^n}$$

トナルカラ $E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E''_{n,i_n}$（右辺ノ集合ガ互ニ共通点ヲ持タナイコトニ注意！）ト置ケバ (7), (8) ヨリ

$$(9)\quad \int_{E^*} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E''_{n,i_n}} f(t)\,dt \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \leqq 1$$

$$(10)\quad \int_{E^*} g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E''_{n,i_n}} g(t)\,dt \geqq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

トナリ仮定 (1) ニ矛盾スル。ヨッテ (3) ヲ満足スル如キ K ノ存在ガ示サレタ。

次ニ $\int_E g(t)\,dt < \infty$ トシ

$$(11)\quad n-1 \leqq \int_E g(t)\,dt < n$$

ナル如キ正整数 n ヲトル。然ルトキハ E ハ

$$(12)\quad \int_{E'''_i} g(t)\,dt < 1, \qquad i = 1, \cdots\cdots, n$$

ナル如キ互ニ共通点ナキ可測集合 $\{E'''_i \mid i = 1, \cdots\cdots, n\}$ ノ和ト考ヘルコトガ出来ルカラ

$$(13)\quad \int_E f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{E'''_i} f(t)\,dt \leqq nK \leqq K\left(\int_E g(t)\,dt + 1\right)$$

トナル。

$$(14)\quad h(t) = \max(\,f(t) - Kg(t),\ 0\,)$$

ト置ケバ $h(t)$ ガ (2) ヲ満足スルコトハ明カデアリ $\int_0^1 h(t)\,dt < \infty$ トナルコトハ $\int_E g(t)\,dt < \infty$ ナル任意ノ可測集合 E ニ対シテ

$$(15)\quad \int_E h(t)\,dt = \int_{E\wedge E_0} \bigl(f(t) - Kg(t)\bigr)\,dt$$

$$= \int_{E\wedge E_0} f(t)\,dt - K\int_{E\wedge E_0} g(t)\,dt \leqq K$$

トナルコトカラワカル。但シ $E_0 = \{t \mid f(t) - Kg(t) \geqq 0\}$ デアル。コレニヨッテ定理ノ証明ガ完結スル。

（注意）　上ノ定理ノ証明ト全ク同ジ方針ニヨッテ次ノ事実ガ証明サレル。

（定理）　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ガ正項発散級数ニテ $0 \leqq a_n \leqq 1$, $0 \leqq b_n \leqq 1$, $n = 1, 2, \text{-----}$ ナルモノトスル。然ルトキハ

$$(16)\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \infty \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} < \infty$$

ガ任意ノ部分系列 $\{n_k \mid k = 1, 2, \text{-----}\}$ ニ対シテ成立スルタメニ必要且十分ナ條件ハ

$$(17)\quad b_n \leqq K a_n + c_n$$

ガ $n = 1, 2, \text{-----}$ ニ對シテ成立スル如キ常數 K ト正項収斂級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ガ存在スルコトデアル。