

1165. 或ル函数方程式 = 就イテ

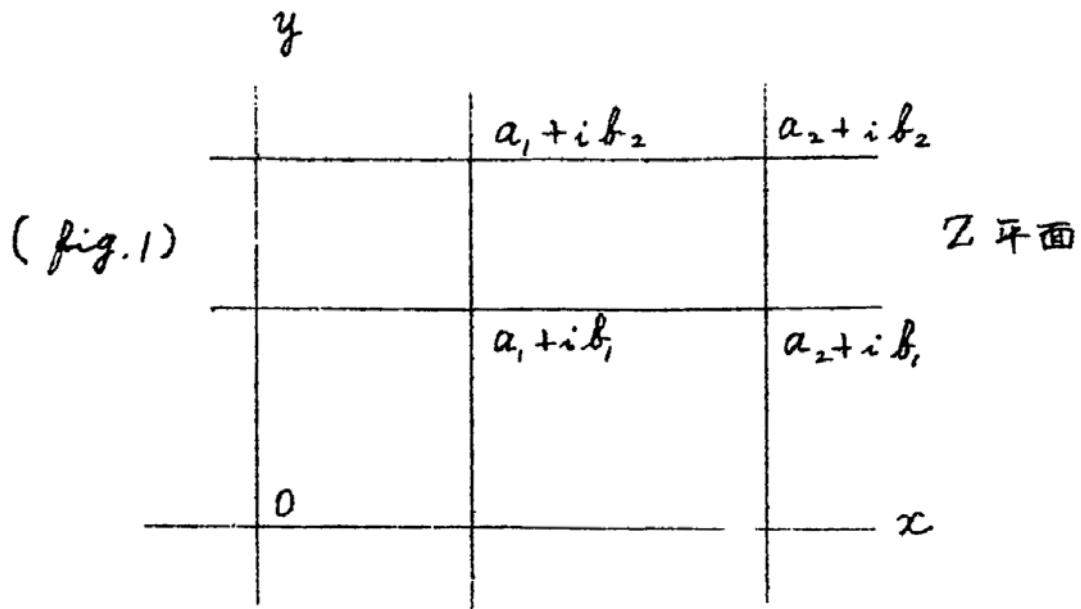
(Zwerner, 定理, 別証明)

北村 泰一 (東北帝大
理學部)

春木 博 (神戸高
等商船)

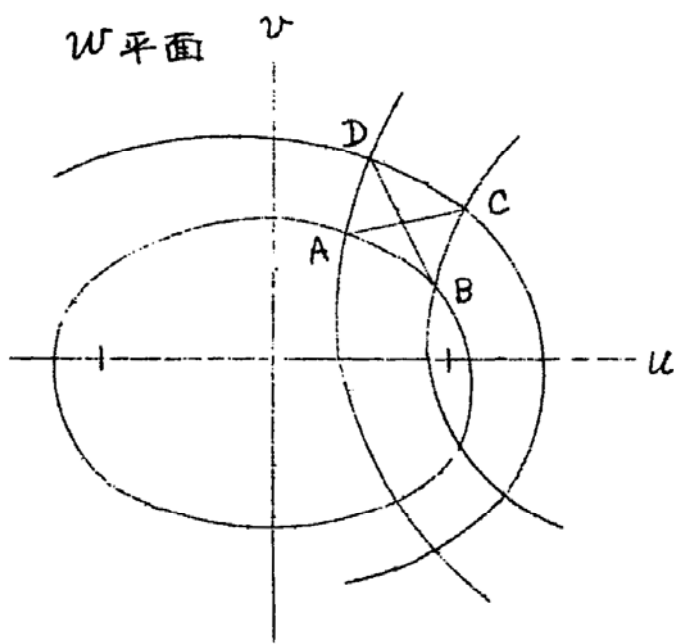
坐標幾何學二次ノ問題ガアル。(Ivory, 定理)

共焦ナルニ系ノ二次曲線群 T_1, T_2 アルトキ T_1
ノ任意ノニツト T_2 ノ任意ノニツノ作ル四ツノ
交点ニ對シ、斜 (ハスカケ) ノ對角線ノ長サハ相
等シ。



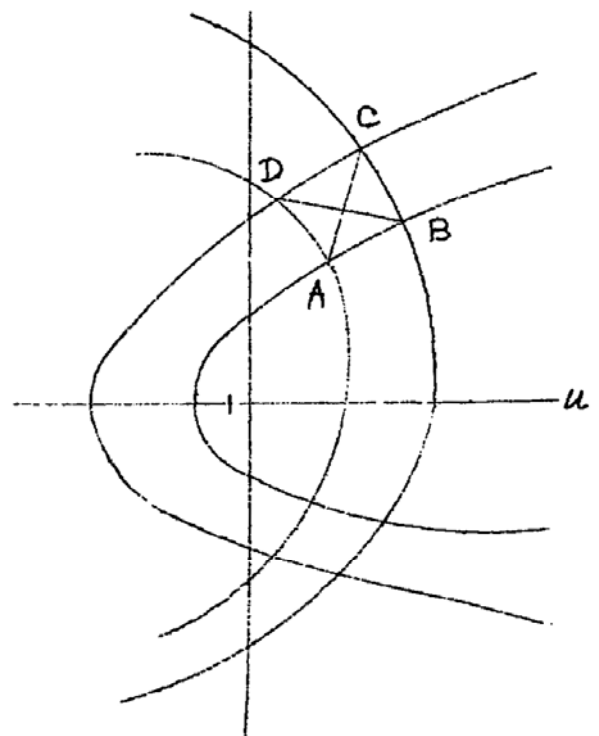
$w = \sin Z$
 $= f(z)$

$w = z^2$
 $v = f(z)$



(fig. 2)

$\overline{AC} = \overline{BD}$



(fig. 3)

$\overline{AC} = \overline{BD}$

之ヲ等角寫像ノ問題トシテ次ノ如ク解ケル。

前者 (fig. 2) ガアレバ

$$|\sin(a_1 + b_1 i) - \sin(a_2 + b_2 i)|$$

$$= 2 \left| \cos \frac{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}{2} \right| \left| \sin \frac{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}{2} \right|$$

$$|\sin(a_1 - b_2 i) - \sin(a_2 + b_1 i)|$$

$$= 2 \left| \cos \frac{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}{2} \right| \left| \sin \frac{(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)i}{2} \right|$$

トナリ, 両式ノ右辺ハ相等シクナルカラ $\overline{AC} = \overline{BD}$ トナル。

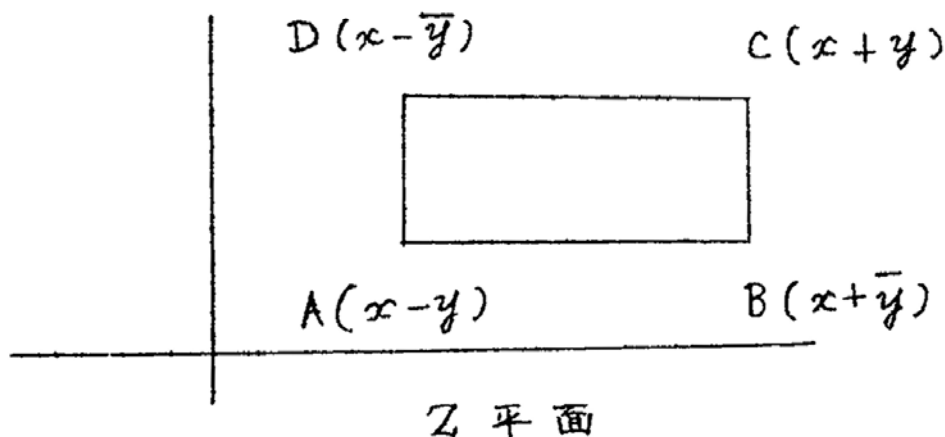
後者 (fig. 3) ノトキモ大体同様デアル。

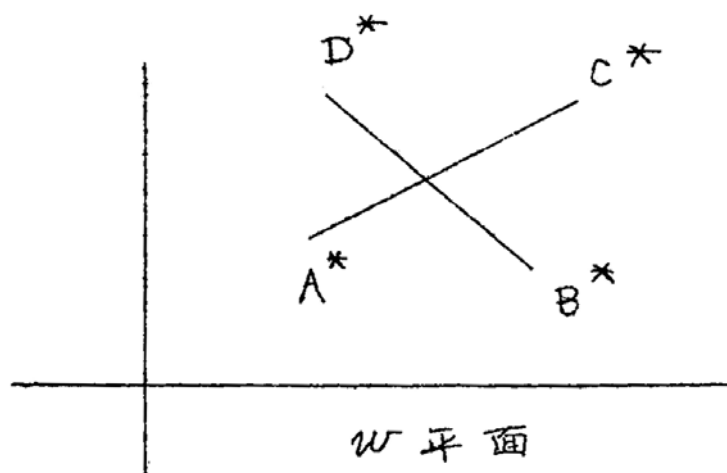
ソコヲ逆ニ f ヲ未知函数 (解析函数トスル) ト考ヘ
 タトキ (f ヲ解析函数トスレバ上ノ Identity ノ性質ヲ
 有スルニ群ル曲線網ヲ求メヨト云フコトニナル)

$$|f(x + iy) - f(x' + iy')| = |f(x + iy') - f(x' + iy)|$$

ノ解ハドウナルカト云フコトヲ問題ニスル。

但シ x, y, x', y' ハ實數ヲアラハス。之ハ次ノ如ク
 ニ解ケル。





$$(A^*C^* = B^*D^*)$$

文字ヲ書キカヘテ上ノ函数方程式ヲ書キ直スト

$$|f(x+y) - f(x-y)| = |f(x+\bar{y}) - f(x-\bar{y})|$$

トスル。茲ニ x, y ハ任意ノ複素數ヲアラハシ、 \bar{y} ハ y ノ共軛複素數トスル。

$$(1) |f(x+y) - f(x-y)| = |f(x+\bar{y}) - f(x-\bar{y})|$$

$\varphi(x, y) = f(x+y) - f(x-y)$ トオキ、之ヲ y ノ巾級數ニ展開スルトキ $\varphi(x, 0) = 0$ トスル故

$$(2) \varphi(x, y) = A_k(x)y^k + A_{k+1}(x)y^{k+1} + \dots \\ \dots + A_n(x)y^n + \dots \quad (k \geq 1)$$

ト書ケル。茲ニ $A_k(x) \neq 0$ トスル。

$$(1) \text{ヨリ } |\varphi(x, y)| = |\varphi(x, \bar{y})|$$

之ヲ書キ直セバ

$$\varphi(x, y)\overline{\varphi(x, y)} = \varphi(x, \bar{y})\overline{\varphi(x, \bar{y})}$$

上式ハ (2) ヲ代入シテ、 y 及ビ \bar{y} ノ巾ノ相當項ノ係數ヲ相等シトオクコトニヨリ

$$A_k(x)\overline{A_l(x)} = \overline{A_k(x)}A_l(x) \\ (l = k+1, k+2, \dots)$$

$A_k(x) \neq 0$ なる故、或る領域に於て

$$\frac{A_l(x)}{A_k(x)} = \frac{\overline{A_l(x)}}{\overline{A_k(x)}}$$

が成り立つ。故に正則函数 $\frac{A_l(x)}{A_k(x)}$ は或る領域に於て常に實數値を取らぬ故

$$A_l(x) = \alpha_l A_k(x) \quad (l = k+1, k+2, \dots)$$

が數平面上に於て恒等的に成り立つ。但し α_l は實常數である。

$$\text{故に (2) より} \quad f(x, y) = A_k(x) \left[y^k + \alpha_{k+1} y^{k+1} + \alpha_{k+2} y^{k+2} + \dots \right]$$

を得る。茲に $\alpha_l \quad (l = k+1, k+2, \dots)$ は實常數である。

$$\text{よって} \quad A_k(x) = 2p(x),$$

$$y^k + \alpha_{k+1} y^{k+1} + \alpha_{k+2} y^{k+2} + \dots = q(y)$$

ト改テ書ケル

$$f(x, y) = 2p(x) q(y)$$

故に

$$(3) \quad f(x+y) - f(x-y) = 2p(x) q(y)$$

茲に $q(y)$ は實係數の巾級數を展開する。 $y^k \quad (k \geq 1)$ より始まる整函数であり、從つて勿論 $q(0) = 0$ である。

$p(x) \neq 0$, ($p(x) = 0$ ならば $f(x)$ は恒等的に常數) なる故

$$(3) \text{ より} \quad q(y) = \frac{1}{2p(x)} [f(x+y) - f(x-y)]$$

$$\begin{aligned}
\text{故} &= g(y_1 + y_2) + g(y_1 - y_2) \\
&= \frac{1}{2p(x)} \left\{ f(x + y_1 + y_2) - f(x - y_1 - y_2) \right. \\
&\quad \left. + f(x + y_1 - y_2) - f(x - y_1 + y_2) \right\} \\
&= \frac{1}{2p(x)} \left\{ [f(x + y_1 + y_2) - f(x - y_1 + y_2)] \right. \\
&\quad \left. + [f(x + y_1 - y_2) - f(x - y_1 - y_2)] \right\} \\
&= \frac{1}{2p(x)} \left\{ 2p(x + y_2) g(y_1) + 2p(x - y_2) g(y_1) \right\} \\
&= \frac{p(x + y_2) + p(x - y_2)}{p(x)} g(y_1)
\end{aligned}$$

故 = 、文字ヲ改メテ書ケル

$$(4) \quad g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y)$$

コト = 、 $g(y)$ ハ y ノミノ函数デアリ。上ニ於テ

$$\frac{1}{2} \frac{p(x + y_2) + p(x - y_2)}{p(x)} = \text{アタル。}$$

(4) ハ有名ノ函数方程式デ、之ハ (4) ヲ得タト同様ノ方法ヲ解クト (前ニ書イタヤウニ $g(0) = 0$, $g(x) = x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \dots$ ノ展開ノ係數ハスベテ實數ナルコトニ注意シテ)

$$\text{結局 } g(x) = x \text{ 又ハ } g(x) = \sin x,$$

$$\text{又ハ } g(x) = \sin kx$$

トナル。次ニ、コノ三ツノ場合ヲ分ケテ $f(x)$ ヲ求ムル。

$$\boxed{\text{第一ノ場合}} \quad g(x) = x + \text{ルトキ}$$

コトキハ (3) ヲリ

$$f(x+y) - f(x-y) = 2p(x)y$$

之ヲ (4) ヲ 得タトキト同ジ様ナ方法ヲ解ケバ

結局 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (茲ニ a, b, c ハ 複素常
数)

第二ノ場合 $g(x) = \sin dx + \text{コトキ}$

コトキハ (3) ヲリ

$$f(x+y) - f(x-y) = 2p(x)\sin dy$$

之ヲ (4) ヲ 得タトキト同ジ様ナ方法ヲ解ケバ

結局 $f(x) = a\sin dx + b\cos dx + c$

(茲ニ a, b, c ハ 複素常數, d ハ 實常數)

第三ノ場合 $g(x) = \sin hx + \text{コトキ}$

コトキハ 同様ニシテ

$$f(x) = a\sin hdx + b\cos hdx + c$$

(茲ニ a, b, c ハ 複素常數, d ハ 實常數)

結局求ムル解ハ次ノ三ツナレコトヲ知ル。

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(x) = a\sin dx + b\cos dx + c \\ f(x) = a\sin hdx + b\cos hdx + c \end{cases}$$

茲ニ a, b, c ハ 複素常數ニシテ, d ハ 實常數

Ivoryノ性續ヲ有スル直交曲線族ガ共焦有心ニ次
曲線及ビ共焦拋物線族ニ限ルコトハ

Kurt Zwierner: Orthogonalsystem in
denen Ivorys Theorem gilt: Abhand

aus dem Hamburgischen Mathematischen Seminar 5 (1926-27) 313
— 336頁

= 証明のラアルが上記、証明ハ之、別証明ト+IV。

———— (完) ————