$\boxed{1164.}$ 道ノ定義ニ就テ

伊藤　清（名大）
東屋五郎

Weyl ハ Die Idee der Riemannschen Fläche

(1923) ニ於テ Bewegung ヲ抽象シテ Weg ヲ定義シテ居リマス。

ソノ際二ツノ運動

$$B_1 : (\varphi_1(t);\ \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1),\ B_2 : (\varphi_2(t);\ \alpha_2 \leqq t \leqq \beta)$$

(以後 $(\varphi_1(t);\ \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1)$ ハ $[\alpha_1 \beta_1]$ ノ点 t ニ $\varphi_1(t)$ ヲ對應サセル寫像ソノモノヲアラハシ, $\{\varphi_1(t);\ \alpha_1 \leqq t \leqq \beta_1\}$ ハソノ Bild タル集合ヲアラハスコトニシマス) ガ equivalent デアルトイフノハ, $[\alpha_1 \beta_1]$ カラ $[\alpha_2 \beta_2]$ ノ上ヘノ一對一單調増加對應ガアッテ $\varphi_2 \psi = \varphi_1$ ナルヤウニ出來ルコトデアルトナシ、コレガ equivalence ノ三條件ヲ滿スノデ, コレニヨリアラユル運動ヲ組分ケシテ, ソノ組ヲ道ト呼ンデ居リマス。コノ定義ニヨリマスト

$B_1 :\ (\varphi_1(t);\ 0 \leqq t \leqq 1)$ 但シ $\varphi_1(t) = t,\ (0 \leqq t \leqq 1)$

$B_2 :\ (\varphi_2(t);\ 0 \leqq t \leqq 1)$ 但シ $\varphi_1(t) = \frac{3}{2}t,\ (0 \leqq t \leqq \frac{1}{3})$

$$〃\ = \frac{1}{2},\ (\tfrac{1}{3} < t < \tfrac{2}{3})$$

$$〃\ = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(t - \frac{2}{3}\right),$$

$$\left(\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1\right)$$

ナル B_1, B_2 ハ equivalent デナイコトニナリマス。

故ニ長サノアル道ヲ長サヲ parameter トシテアラハストイフ常套論法ガ利カナイコトモ起リマス。コノ点ヲ救ハウトイフノガ小稿ノ目的デス。

ソレニハ最初ニ掲ゲタ B_1, B_2 ガ equivalent トイフコトハ

"[01] カラ $[\alpha_1\beta_1]$, $[\alpha_2\beta_2]$ ノ上ヘノ單調非減少(必ズシモ一對一ナルヲ要セズ)ナ寫像 ψ_1, ψ_2 ガアッテ, $\varphi_1\psi_1=\varphi_2\psi_2$ トナルヤウニ出來ルコトデアル" ト定義シマス。コノ條件ハ Weyl ノ條件ヨリ弱イワケデス。コレガ $B_1\sim B_1$, $B_1\sim B_2\longrightarrow B_2\sim B_1$ ヲ滿スコトハ明ラカデス。問題ハ移動律デス。B_1, B_2 ハ今迄通リトシ, B_3 : $(\varphi_3(t);\ \alpha_3\leqq t\leqq\beta_3)$ トシマス。サテ $B_1\sim B_2$, $B_2\sim B_3$ トシマス。

即チ $[0,1]$ カラ $[\alpha_1\beta_1]$, $[\alpha_2\beta_2]$, $[\alpha_2\beta_2]$, $[\alpha_3\beta_3]$ ノ上ヘ夫々單調非減少對應 ψ_1, ψ_2, ψ_2', ψ_3 ガアッテ, $\varphi_1\psi_1=\varphi_2\psi_2$, $\varphi_2\psi_2'=\varphi_3\psi_3$ トシテオキマス。コノ時 $[01]$ カラ $[\alpha_1\beta_1]$, $[\alpha_3\beta_3]$ ノ上ヘ單調非減少對應 ψ_1', ψ_3' ガアッテ $\varphi_1\psi_1'=\varphi_3\psi_3'$ トナルコトヲ示セバヨイワケデス。

今 $[\alpha_2,\beta_2]$ ヲトリ, ソノ各点ノ ψ_2 ニヨル Urbild ヲ考ヘルト, ソレハ一点或ヒハ閉區間デアリマスガ, 後者ノ場合ノ起ルヤウナ $[\alpha_2\beta_2]$ 上ノ点ノ集合ヲ $\mathfrak{a}$ トシマス。明ラカニ $\mathfrak{a}$ ハ可附番集合デス。同樣ニ ψ_2' ニ對シテ可附番集合 $\mathfrak{a}'$ ヲ得タトシマス。

$\mathfrak{M}=\mathfrak{a}\cup\mathfrak{a}'$ トシマス。$\mathfrak{M}$ ハ可附番集合デスカラソノ元ニ番号ヲツケテ $\{m_i\}$ トシマス。サテ二次元集合 Λ ヲ次ノ如ク定義シマス。

$$\Lambda=\{(x\,y);\ \alpha_2\leqq x\leqq\beta_2,\ x\in\mathfrak{M}\to 0\leqq y\leqq 1,$$
$$x\notin\mathfrak{M}\to y=0\}$$

次ニΛニ辭書式ノ順序（linear order）ヲツケマス。

シカラバΛハコノ順序デcompleteデ，又ソレカラ導カレタorder topologyニ關シテ到ル所稠密ナ可附番集合がアリマス。（ソレニハ$\mathfrak{M}$が可附番ナルコトがキイテキマス）。故ニΛハ閉區間［0, 1］トorder-isomorphデス。コノisomorphismヲ與ヘル［0, 1］カラΛヘノ寫像ヲKトシマス。次ニΛカラ［0 1］ヘノ對應ϕヲ次ノ如クキメマス。

$(x, y)\in\Lambda$ヲトリ$x\notin\mathfrak{A}$ナラバ$\psi_2^{-1}(x)$ハ一点デスカラ$\phi((x, y))=\psi_2^{-1}(x)$ト定義シマス．モシ$x\in\mathfrak{A}$ナラバ$\psi_2^{-1}(x)$ハ閉區間デスカラ，コレヲ$[\alpha_x, \beta_x]$トシテ，$\phi((x, y))=\alpha_x+y(\beta_x-\alpha_x)$ト定義シマス。然ラバ$\phi$ハorder．ノ意味デ單調非減少寫像デ$\psi_2\phi((x\,y))=x$デス。

同樣ニψ'_2ニ對シテϕ'ヲ定義シマス。$\psi'_2\phi'((x\,y))=x$．故ニ$\psi_2\phi=\psi_2\phi'$．サテ$\psi'_1=\psi_1\phi K$，$\psi'_3=\psi_3\phi' K$トスレバ，ψ_1, ψ_3が求ムルモノデス．先ヅψ'_1, ψ'_3が夫々$[0, 1]$カラ$[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_3, \beta_3]$ヘノ單調非減少ナ寫像ナルコトハ明ラカデス。又

$$\varphi_1\psi'_1=\varphi_1\psi_1\phi K=\varphi_2\psi_2\phi K=\varphi_2\psi'_2\phi' K$$
$$=\varphi_3\psi_3\phi' K=\varphi_3\psi'_3$$

デスカラ，$B_1 \sim B_3$ トナリマス。

借テ道ノ長サヲ，ソレニ属スル運動ノ運動距離ト定義スレバ，ソレハソノ運動ノ選ビ方ニ無関係デ，道ヲ長サヲ parameter トシテアラハスコトノ可能性モ簡単ニ示サレマス。