

1161. 代数方程式, 根, 限界 = 就キテ

春水 博 (神戸高等  
船舶学校)

(定理) 實係数ヲ有スル  $n$  次, 代数方程式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ガ、角領域  $\frac{\pi}{n} > \alpha > \text{amp.}(z) > 0$  = 於テ、根  $z_0$  ヲ  
有スルトキ

$$M = \text{Max.}_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right| < \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

トヲバ

$$|Z_0| < 1$$

デアール。

(証明)  $Z_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  トオケバ

$$\frac{\pi}{n} > \alpha > \theta > 0$$

コノ  $Z_0$  ヲ  $f(Z_0) = 0$  へ代入スレバ 左辺ノ虚数部ハ  
0 トナリ、又  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ノ假定ニヨリ實数  
ナル故

$$g(r) = a_0 \sin n\theta r^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin k\theta r^k = 0 \dots \dots (1)$$

$\pi > n\theta > 0$  ナルコトナリ  $|\sin k\theta| = \sin k\theta$  ( $k =$   
 $1, 2, \dots, n$ ) ナル故、且ツ又

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| = |a_0| M$$

ナル故

$$(1) \text{ヨリ} \quad |g(r)| \geq |a_0| \sin n\theta r^n - |a_0| M \sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta r^k$$

コトナリ、間接法ニヨリ  $|Z_0| = r \geq 1$  トナレバ

$$r^n \geq r^k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

ナル故

$$|g(r)| \geq |a_0| \sin n\theta r^n - |a_0| M r^n \sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta$$

ナルハ

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

＋ル故

$$|g(r)| \geq |a_0| r^n \left( \sin n\theta - M \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\text{故} = |g(r)| \geq \frac{|a_0| r^n \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} - \sin \frac{(n-1)\theta}{2} M \right)$$

右辺の正 = 正ルヲシテ = 正ルニシテ  $\frac{\pi}{n} > \theta > 0$  正ルニシテ  
 $\pi - \theta = \text{對シ}$

$$M < \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{(n-1)\theta}{2}}$$

正ル知テ M ヲトレバヨク。ソレニハ右辺ノ最小値ヲ求め  
レバヨク。

コノ不等式、右辺ヲ  $h(\theta)$  トオケバ

$$h'(\theta) = \frac{\sin n\theta - n \sin \theta}{2 \sin^2 \frac{(n-1)\theta}{2}}$$

故 =  $\frac{\pi}{n} > \theta \geq \theta > 0$  正ルニシテ  $h'(\theta) < 0$

故 =  $h(\theta)$  ハ  $\theta \geq \theta > 0$  = 於テ 減小函数ナル故  $h(\theta)$  ハ  
 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{n}$  = 於テ  $\theta = \frac{\pi}{n}$  ノキ 最小値ヲ取ル。

$$\text{従} \text{ ヲ } M < \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{\sin \frac{(n-1)\pi}{2}}$$

トスレバ  $|g(r)| > 0$

是ハ  $g(r) = 0$  ト矛盾スル。

矛盾ノ原因ハ  $|z_0| = r \geq 1$  デアルカラ  $r < 1$

即チ  $|z_0| < 1$

————— (完) —————