[1160] 下葉函數ノ性質ニツイテ

吉田德之助

茲ニ Bieberbach ノ面積定理ヲ少シク拡張スレバ

p葉函數ノ性質ガ一二出テ来ルコトヲ述ベテミタイト思ヒマス。先ヅ

$$w(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots\cdots$$

ヲ $1<|z|<\infty$ デ正則デ $\{w(z)\}^p$ ガ $1<|z|$ デ p 葉デアルトスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leqq 1$$

ガ成立スルコトヲ證明シマス。

$r>1$ トスル。R ヲ十分大ニスレバ $w=w(z)$ ニヨル円 $|z|=R$ ノ像 C_R ハ單一閉曲線トナリ円 $|z|=r$ ノ像ヲソノ内部ニ含ム。C_R デ囲マレタル範囲ノ面積ヲ $A(R)$ トシ円環 $r<|z|<R$ ノ像 $B(r,R)$ ノ面積ヲ重ナレル部分ハ，ソノ度數ダケ計算シテ $A(r,R)$ トスル。

$\{w(z)\}^p$ ハ p 葉デアルカラ $\displaystyle\prod_{\nu=0}^{p-1}\left(w(z)-\alpha e^{\frac{2\nu\pi i}{p}}\right)=0$

ノ $r<|z|<R$ ニ於ケル根ノ個數ハ p ヲ超ヘルコトガナイ。ソレ故点 α ノ上デ $B(r,R)$ ガ k 重ニ重ナッテヰルモノトスレバ $(p-1)$ 個ノ点 $\alpha e^{\frac{2\pi i}{p}}, \alpha e^{\frac{4\pi i}{p}},\cdots\cdots,\alpha e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}}$ ノウチノ少クトモ $(k-1)$ 個ノ点ノ上ニハ $B(r,R)$ ノ点ガナイコトニナル。ソレ故

$$A(r,R)\leqq A(R)$$

ガ成立スル。

$A(r,R)$, $A(R)$ ヲ計算スレバ

$$A(r,R)=\int_r^R\int_0^{2\pi}|w'(re^{i\theta})|\,r\,d\theta\,dr$$

$$=\pi\left(R^2-\frac{|a_1|^2}{R^2}-\frac{2|a_2|^2}{R^4}-\cdots\cdots\right)-\pi\left(r^2-\frac{|a_1|^2}{r^2}-\frac{2|a_2|^2}{r^4}-\cdots\cdots\right)$$

$$A(R)=\int u(\theta)\,dv(\theta)\qquad (u(\theta)+iv(\theta)=w(Re^{i\theta}))$$

$$=\pi\left(R^2-\frac{|a_1|^2}{R^2}-\frac{2|a_2|^2}{R^4}-\cdots\cdots\right)$$

トナルカラ

$$\left(r^2-\frac{|a_1|^2}{r^2}-\frac{2|a_2|^2}{r^4}-\cdots\cdots\right)\geqq 0$$

$r\to 1$ トシテ $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\leqq 1$ ヲ得ル。

コレヲ p 葉函数ニ應用シテ次ノ結果ヲ得マス．

$$w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

ガ $|z|<1$ デ正則且ツ p 葉デアルトキ

$$|a_{p+1}|\leqq 2p$$

及ビ

$$|w(z)|\geqq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}$$

ガ成立スル．

$f(z)=\{w(z^{-2})\}^{-\frac{1}{2p}}=z+\dfrac{c_1}{z}+\cdots\cdots$ トスレバ

$f(z)$ ハ $1<|z|<\infty$ デ正則トナリ $\{f(z)\}^{2p}$ ハ $1<|z|$ デ $2p$ 葉トナリ $C_1=-\dfrac{a_{p+1}}{2p}$ トナル。前述ニヨリ $\sum n|c_n|^2 \leqq 1$ ナル故 $|a_{p+1}|\leqq 2p$ ヲ得ル。

$$g(z)=\left\{w(z^{-1})\right\}^{-\frac{1}{p}}=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{z^n}+\cdots\cdots$$

トスレバ $g(z)$ ハ $1<|z|<\infty$ デ正則トナリ $\{g(z)\}^p$ ハ $1<|z|$ デ p 葉トナル。従ッテ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqq 1$$

$|z|>\sqrt{2}$ トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|z|^{2n+2}}<1$$

故ニ Schwarz ノ不等式ヲ用ヒテ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|b_n|}{|z|^{n+1}}<1$$

$|z_1|\geqq|z_2|>\sqrt{2}$ トスレバ

$$\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}\right|=\left|1-\frac{b_1}{z_1z_2}-\cdots\cdots-\left(\frac{1}{z_1^n z_2}+\frac{1}{z_1^{n-1}z_2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{z_1 z_2^n}\right)b_n-\cdots\cdots\right|$$

$$\geqq 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|b_n|}{|z_2|^{n+1}}>0$$

従ッテ $g(z)$ ハ $\sqrt{2}<|z|$ デ単葉トナル。故ニ $\{w(z)\}^{\frac{1}{p}}$ ハ $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ デ正則且ツ単葉トナリ Koebe ノ定理ヲ用ヒレバ $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ デ

$$\left|\{w(z)\}^{\frac{1}{p}}\right| \geqq \frac{|z|}{(1+\sqrt{2}|z|)^2} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

ガ成立スル。$\{w(z)\}^{\frac{1}{p}}$ ハ $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ デ单葉デ $w(z)$ ハ

$|z| < 1$ デ p 葉デアルカラ $1 > |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ デ

$$\left|\{w(z)\}^{\frac{1}{p}}\right| > \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

ガ成立スル。従ッテ $|z| < 1$ デ

$$|w(z)| \geqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}$$

ガ成立スル。