

1159 On the Projective normal Parameter.

(A relation between M. J. Haantjes)
(and M. K. Yano.

高野一夫(北大學生)

コレカラ我々ハ接続ガ正規デアルト云フ假定ヲシテ
考ヘテミヨウ。

n 次元ノ歐空間即チ各点ガ (u^1, u^2, \dots, u^n) ナル
 u -system = 依リ興ヘラレルモノヲ考ヘテ, コノ中
= A_0 ナル一点ヲトルト A_0 ハアル固定座標系ニ関シテ
coordinate ヲモツガ, 今ハソレヲ用ヒズニ A_0 ヲトリ
之ヲ原點ノヌウニ取扱ハウ。吾々ノ空間内ガ一点 A_0 ヲ
過ヤル曲線ヲ考ヘル, ソレヲ A_0 = 於ケル切射影空間内
ニ展開シタトキ, 之ガ直線トナルヌウナ曲線ガ所謂 Path
デアリ, コノコトハ入トルテ適當ニエランデ (常數デ
ハナイ。)

$$(1) \quad d^2 A_0 = \lambda d A_0 + \mu A_0$$

ヲ表ハシ得ル。¹⁾

以下 Path ヲコト A_0 ト parameter t ノ函数 P ヲ用ヒテ,

$$\frac{d^2 P A_0}{dt^2} = 0$$

ト形ニシマシト思フ。 t マウチ t ヲ求メルト、ソレガ丁度 projective normal parameter トナル。

以下之ヲ脚註論文ニ撰ツテノベヌ。

r ヲ parameter トシテ

$$\frac{d A_0}{dr} = \frac{du^0}{dr} A_0 + \frac{du^i}{dr} A_i$$

$$\frac{d A_i}{dr} = \omega_{jk}^0 \frac{du^k}{dr} A_0 + \omega_{jk}^i \frac{du^k}{dr} A_j$$

コトヲ ω_{jk}^i ($\lambda = 0, i$) ノ場合ニ現ハル Pfaff 形式 ω_j^i ノ係數ヲ、特ニ $\omega_{jk}^0 = \pi_{jk}^0$ ナル。¹⁾

ソコヲ

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} \text{ヲ求メルト}$$

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} = \left[\frac{d^2 u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr} \right)^2 + \pi_{jk}^0 \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} \right] A_0$$

1) Par M. K. Yuno: Les espaces a connexion projective et la Géométrie projective des Paths. These, 1938.

$$+ \left[\frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{j^k}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} + 2 \frac{du^0}{dr} \frac{du^i}{dr} \right] A_i$$

コ、テ

$$(2) \quad \lambda \frac{du^i}{dr} = \frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{j^k}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} + 2 \frac{du^0}{dr} \frac{du^i}{dr}$$

トオキ

$$(3) \quad \mu = \frac{d^2 u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr} \right)^2 + \Pi_{j^k}^0 \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} - \lambda \frac{du^0}{dr}$$

トキトレバ

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} = \lambda \frac{dA_0}{dr} + \mu A_0 \quad \text{ト+レ。} \quad \text{之ハタシカ(1),}$$

形デアル。

即チ入テ (2) テ定メルコト = ヨリ, *Path* , 條件が成立スルカラ (2) コソ *Path* テ特徴付ケルニ, テアル。

$$+ \text{テ} \quad \frac{d^2 p A_0}{dt^2} = 0 \quad \text{ヲ求テテミルト}$$

$$\frac{d^2 p A_0}{dt^2} = \frac{1}{t'^2} \left(p'' A_0 + 2p' \frac{dA_0}{dr} + p \frac{d^2 A_0}{dr^2} \right)$$

$$- \frac{t''}{t'^3} \left(p' A_0 + p \frac{dA_0}{dr} \right)$$

$$= \frac{p}{t'^2} \left(\frac{2p'}{p} + \lambda - \frac{t''}{t'} \right) \frac{dA_0}{dr} + \frac{p}{t'^2} \left(\frac{p''}{p} + \mu - \frac{t''}{t'} \frac{p'}{p} \right) A_0$$

ソコテ

$$\frac{2p'}{p} + \lambda - \frac{t''}{t} = 0, \quad \frac{p''}{p} + \mu - \frac{t''}{t'} \frac{p'}{p} = 0$$

＋ル條件ヲ與ヘルトキ

$$p \text{ヲ消去シ, } \{t, r\} = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2} \frac{t''^2}{t'^2} \text{トオクト}$$

$$(4) \quad \{t, r\} = \lambda' - \frac{1}{2} \lambda^2 - 2\mu$$

前述シタヤウニ (2) コノ Path ヲ定ムルニト考ヘウル
ノデアツテ、之ヲバ $\Delta = \Delta(r)$ トル Parameter Δ ヲ
エラシメ

$$(5) \quad \frac{d^2 u^i}{d\Delta^2} + \Pi_{j^k}^i \frac{du^j}{d\Delta} \frac{du^k}{d\Delta} = 0$$

＋ル形ニシテト思フ。

ソレニハ簡單ニ計算ニ依ツテ

$$(6) \quad \lambda = \frac{\Delta''}{\Delta'} + 2 \frac{du^0}{dr} \text{トヤウニシテ } \lambda \text{ ヲエラババヨイ}$$

コトガ分ル。

(4) ～ (3) ヲ代入シテ

$$\frac{\{t, r\} - \{\Delta, r\}}{\Delta'^2} = \{t, \Delta\}$$

ヲ用フレバ

$$(7) \quad \{t, \Delta\} = -2 \Pi_{j^k}^0 \frac{du^j}{d\Delta} \frac{du^k}{d\Delta}$$

ヲ得ル。

コノデ又 M. K. Yano / 脚註論文第6章ヲミルト

Π_{jk}^i + 11 affine connection, 曲率をんぞる

$$\Pi_{jkh}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial u^h} - \frac{\partial \Pi_{jh}^i}{\partial u^k} + \Pi_{jk}^m \Pi_{mh}^i - \Pi_{jh}^m \Pi_{mk}^i$$

ヲイトん = 閉シテ contract シ之ヲ Π_{jk} トオケル

$$\Pi_{jk}^0 = -\frac{1}{n-1} \Pi_{jk}$$

ナルコトガ述べラレテイル。

$$\text{依ッテ } \{t, \beta\} = \frac{2}{n-1} \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}$$

+ 11 projective normal parameter, 表示ヲ得ル。

吾々ハ (5), 上ヲ之ヲ得ヲ譯テイル。

今コトヲ $\beta = \lambda - 2 \frac{du^0}{dr}$ トオイテミルト β ハ r ノ函数

トイル。

之ヲ (2) へ入ルルト

$$(2) \quad \frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} = \beta \frac{du^i}{dr}$$

トイル。

以上ヲ換言スルハ

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 u^i}{dr^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} &= \beta \frac{du^i}{dr} \quad + 11 \text{ Path, 上ヲ} \\ \Rightarrow \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} &= 0 \quad + 11 \text{ シイル} \end{aligned}}$$

如キ parameter $s = s(r)$ ヲトリス, 之ヲ
用ヒテ projective normal. parameter

$$\{t, s\} = \frac{2}{n-1} \pi_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}$$

ヲ定メルコトが出来ル。

之レハ

Proceeding of the Edinburgh Math. Society.
Second Series, Vol. 5 (1937-38)

ニ於テ

On the projective geometry of Path.

ナル表題, 下ニ

University of Edinburgh, M. J. Haantjes
ガ註ニニテ與ヘテ projective normal parameter
ノ定義ニ他ナラナイ。