1156. inseparabel ナ体ノ Arithmetik ニ関スル一注意

東屋 五郎（名大）

浅野、中山両先生ハ學士院記事 16 巻 (1940), 「A Remark on the Arithmetic in a subfield」ニ於テ

K が整閉整域 $\mathfrak{O}$ ノ商体, k が K ニ對シテ有限次ナル K ノ部分体トスルトキ, $\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\frown k$ ナル整域ニテ gewöhnliche arithmetik ノ成立ツタメノ條件ヲ求メテ居ラレマスガ、K/k が rein inseparabel デ、且ツ Exponent が有限ナラバ、同様ノコトが成立ツコトニ関シテ簡単ナ注意ヲ述ベマス。

K, $\mathfrak{O}$ ヲ上記ノ意味トシ、k ヲ K/k が Exponent p^e ノ rein inseparabel ナ部分体トスル（勿論 $p \neq 0$ ハ K ノ Charakteristik）。K ノ元ノ p^e 乗ノ全体ヲ $K^{(p^e)}$ ＝テ表ハス（以下 $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ 等モ同様ノ意味ヲ表ハス）ナラバ、$K^{(p^e)} \subseteq k \subseteq K$ デアル。

$\mathfrak{o}=\mathfrak{O}\frown k$ トオケバ, $\mathfrak{o}$ ハ明ラカニ整閉整域デアルが、k が $\mathfrak{o}$ ノ商体トナッテ井ル。何トナレバ $a \in k$ ヲ任意ニトルトキ、$a\alpha \in \mathfrak{O}$ ナル $\alpha(\neq 0) \in \mathfrak{O}$ がアルが $\alpha^{p^e} \in \mathfrak{O}\frown k=\mathfrak{o}$, $a\alpha^{p^e} \in \mathfrak{O}\frown k=\mathfrak{o}$ トナル故デアル。

更ニ、$\mathfrak{O}^{(p^e)} \subseteq \mathfrak{O}\frown k=\mathfrak{o}$ ナル故 $\mathfrak{O}$ ノ元ハスベテ $\mathfrak{o}$-ganz デアルが、勿論 $\mathfrak{O}$ が整閉ナルコトカラ $\mathfrak{o}$-ganz ナ K ノ元全

体ガ $\mathfrak{O}$ ニ一致スルコトガ分ル。

逆ニ、$\mathfrak{o}$ ヲ $\mathfrak{k}$ ヲ商体トスル任意ノ整閉整域トシ、$\mathfrak{O}$ ヲ K ノ $\mathfrak{o}$-ganz ナ元全体トスレバ、$\mathfrak{O}$ ハ K ヲ商体トスル整閉整域デ $\mathfrak{o} = \mathfrak{O} \cap \mathfrak{k}$ ガ成立ツ。

即チ、K ヲ商体トスル整閉整域 $\mathfrak{O}$ ト $\mathfrak{k}$ ヲ商体トスル整閉整域 $\mathfrak{o}$ トガ一對一ニ對應スル。

（ソノ時、更ニ全整閉（vollständig ganz-abgeschlossen）ナ整域同志ガ對應スル。何トナレバ、$\mathfrak{O}$ ガ全整閉ナラ，$\mathfrak{o}$ モサウデアルコトハ明ラカデアルガ、逆ニ $\mathfrak{o}$ ヲ全整閉ト假定シ、$\lambda\alpha^{\nu} \in \mathfrak{O}$ $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$, $\lambda (\neq 0) \in K$, $\alpha \in K$ トスレバ $\lambda^{p^e}\alpha^{p^e\nu} \in \mathfrak{O}^{(p^e)} \subseteq \mathfrak{o}$, $\lambda^{p^e} (\neq 0) \in \mathfrak{k}$, $\alpha^{p^e} \in \mathfrak{k}$ ナル故、$\alpha^{p^e} \in \mathfrak{o}$ 従ッテ $\alpha \in \mathfrak{O}$ ナルコトガ分ル）

定理. $\mathfrak{O}, \mathfrak{o}$ ヲ上ノ如キ意味トスレバ，$\mathfrak{O}$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツタメノ必要且十分ナ條件ハ $\mathfrak{o}$ ニ於テ，ソレガ成立ツコトデアル。

証明. 先ヅ必要ナルコトハ、上記論文ノ証明ヲ少シ擴張スレバヨイノデスガ，念ノタメ述ベテミマスト $\mathfrak{a}$ ヲ任意ノ $\mathfrak{o}$-Ideal トスル．$\mathfrak{a}\mathfrak{O}$ ナル $\mathfrak{O}$-Ideal ノ逆 Ideal ヲ $(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}$ トセバ $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{O}(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} = \mathfrak{O}$.

$\mathfrak{P}$ ヲ任意ノ $\mathfrak{O}$ ノ Primideal トシ、ソノ Bewertungsring ヲ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ トシ，$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{k}$ トオケバ，$\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ハ $\mathfrak{P}$ ガ $\mathfrak{k}$ ニ於テ引起ス Bewertung ノ Bewertungsring デアルガ、$\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ ナル $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$-Ideal ノ逆 Ideal ヲ $(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}$ ニテ表ハセバ $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$

シカラバ $(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}\mathfrak{O} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-1}\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ナル故

$$[(\mathfrak{a}\mathfrak{O}^{-1})]^{(p^e)} \subseteqq (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e};$$

$$[(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}]^{(p^e)} \subseteqq \bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}$$

従ッテ

$$\mathfrak{O}^{(p^e)} = \mathfrak{a}^{(p^e)}[(\mathfrak{a}\mathfrak{O})^{-1}]^{(p^e)} \subseteqq \mathfrak{a}^{p^e}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right]$$

$$\subseteqq \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{a}^{p^e}(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e} = \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$$

$$= \bigcap_{\mathfrak{P}} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \cap k = \mathfrak{O} \cap k = \mathfrak{o}$$

トナルガ $\mathfrak{O}^{(p^e)} \ni 1$ ナル故 $\mathfrak{a}^{p^e}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right] = \mathfrak{o}$. 即チ $\mathfrak{a}$ ガ逆 Ideal $\mathfrak{a}^{p^e-1}\left[\bigcap_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}})^{-p^e}\right]$ ヲ有スルコトガ分ル。

逆ニ十分條件ナルコトノ証明ハ、今証明シタ必要條件ヲ使ッテ簡單ニ出来マス。

即チ, $\mathfrak{O}$ ニ於テ Arithmetik ガ成立ツト假定スル。$\mathfrak{O}$ 従ッテ $\mathfrak{O}$ ニ同型ナ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ハ整閉デ且ツ $\mathfrak{O}$ ハ K ノ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ニ對スル Hauptordnung デアルカラ、$\mathfrak{O}^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap K^{(p^e)} = \mathfrak{O} \cap k \cap K^{(p^e)} = \mathfrak{o} \cap K^{(p^e)}$. 而シテ $k/K^{(p^e)}$ ハ Exponent ガ高々 p^e ナル rein inseparabel ナ体ナル故ニ、上ノ必要條件ニヨリ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$, 従ッテ $\mathfrak{O}^{(p^e)}$ ニ同型ナ $\mathfrak{O}$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトガ分ル。

コノ定理ヲ使ヒマスト、有名ナ「k ガ整域 $\mathfrak{o}$ ノ商体デ K ヲ k ノ任意ノ有限次擴大体トシ, $\mathfrak{O}$ ヲ K ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung トスルトキ、若シ $\mathfrak{o}$ ニ於テ gewöhnliche

Arithmetik ガ成立ツナラバ、$\mathfrak{O}$ ニ於テモソレガ成立ツ」トイフコトノ一証明ガ得ラレマス。

即チ、K_0 ヲ K/k ノ größter separabel Unterkörper トスレバ K_0 ノ $\mathfrak{o}$ ニ對スル Hauptordnung $\mathfrak{O}_0$ ハ通常ノ如ク endliche $\mathfrak{o}$-Modul ナルコトヨリ、$\mathfrak{O}_0$ ニ於テ gewöhnliche Arithmetik ノ成立ツコトヲ証明スルトシテ、$K|K_0$ ガ有限次，rein inseparabel ナルコトカラ定理ニヨリ $\mathfrak{O}_0$ ニ對スル Hauptordnung $\mathfrak{O}$ ニ於テモ成立ツワケデアリマス。