1155 或ル種ノ函數方程式ニ就イテ

春木　孝（神戸高等商船學校）

先ヅ本誌257號1144ニ於ケル拙文「或ル種ノ函數方程式及ビ函數不等式ニ就イテ」ニ於ケル訂正ヲサセテ戴キマス.

486頁下カラ11行目"次ニ$f(x)$ガ原点ノ近傍ニ於テ"ヲ"次ニ$f(x)$ガ$x=1$ノ近傍ニ於テ"ト訂正シ, 487頁上カラ7行目"原点ノ適當ナ近傍ニ於テ"ヲ"$x=1$ノ適當ナ近傍ニ於テ"ト訂正シマス。又495頁下カラ5行目"$f(x,0)=x^{\alpha}$"ヲ"$f(x,0)=x^{\alpha}$, 又ハ$f(x)=\mathrm{sign}(x)x^{\alpha}$"ト訂正シマス。之ハ以下ノ結果ニハ影響シマセン。

以下、断片的デハアルガ、種々ノ函數方程式ニツイテ述ベサセテ頂キマス。

§1. $f(z)$ガがうす平面上、$|z|<+\infty$ニ於テ定義サレタ一價複素數値函數ニシテ、原点ニ於テ連續ナリトスルトキ次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。但シaハ$|a|<1$ナル任意ノ複素常數ナリトスル。

(1)　$f(z)=(1+az)f(az)$

(1)ヨリ任意ノ自然數nニ對シテ

$$f(z)=f(a^n z)\prod_{k=1}^{n}(1+a^k z)$$

$n\to\infty$ナラシムレバ、$f(x)$ハ原点ニ於テ連續デ$|a|<1$ナル故

$$f(a^n z) \longrightarrow f(0) = c$$

又右辺ノ無限乗積ハ $|z| < +\infty$ ニテ絶對收斂ナル故

$$f(z) = c\prod_{k=1}^{\infty}(1+a^k z) = c\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-a)(1-a^2)\cdots\cdots(1-a^n)}z^n\right\}$$

茲ニCハ任意ノ複素常數ナリトスル。

コノ函數ハ Euler ニ依ッテ論ゼラレタ函數デアル。

§2. $f(z)$ ヲがうす平面上、$|z| < 1$ ニテ定義サレタ一價複素數値函數ニシテ、原点ニ於テ連續ナリトスルトキ、次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。

$$(2) \quad f(z) = (1+z)f(z^2)$$

(2) ヨリ任意ノ自然數 n ニ對シテ

$$f(z) = f(z^{2^n})\prod_{k=1}^{n}(1+z^{2^{k-1}})$$

コノ兩辺ニ於テ、$n \longrightarrow +\infty$ ナラシムレバ $f(z)$ ハ原点ニ於テ連續ニシテ $|z| < 1$ ナル故, $f(z^{2^n}) \rightarrow f(0) = c$

又 $\prod_{k=1}^{n}(1+z^{2^{k-1}}) \rightarrow \frac{1}{1-z}$ ナル故（Euler ニ依ッテ知ラレタ式）

$$f(z) = \frac{c}{1-z}$$

茲ニCハ任意ノ複素常數ナリトスル。

§3. $f(x)$ ハ $-\infty < x < +\infty$ ニテ定義サレタ一價實數値函數ニシテ. $f(0) = 0$ デ、$f(x)$ ハ原点デ、微分可能ナリトスルトキ、次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨ.

但シ $\varphi(x)$ ハ既知函數デ、$-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレタ一價實數値函數ニシテ、無限乘積 $\prod_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ ニテ收斂スルモノトスル。

(3) $\quad f(2x)=2f(x)\varphi(x)$

(3)ニ於テ、x ノ代リニ $\frac{x}{2}$ トオケバ $\quad f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$

之レヨリ任意ノ自然數 n ニ對シテ

$$f(x)=2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

故ニ $x\neq 0$ トスレバ

$$f(x)=\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}x\prod_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

コノ兩辺ニ於テ $n\to+\infty$ ナラシムレバ $f(0)=0$ ニシテ $f(x)$ ハ原点ニ於テ微分可能ナル故

$$\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\to c$$

故ニ $\quad f(x)=cx\prod_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$

c ハ任意ノ實常數トシテヨイ。

以上ハ $x\neq 0$ トシタが、之が $x=0$ ニテモ成立スルコトハ明カデアル。逆ニ、之が (3) ヲ滿足セシメルコトハ容易ニ証明サレル。

$\varphi(x)=\cos x$ トスレバ、ヨク知ラレタ Euler ノ

関係式カヲ

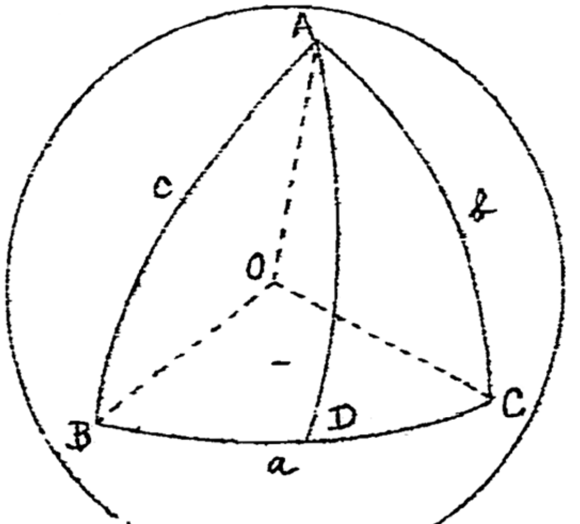
$$f(x)=c\sin x$$

トナル。

§4. $f(x)$ ガ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレタ一様可測實函數ナリトスルトキ、次ノ函數方程式ヲ満足セシメルモノハ、$f(x)\equiv 0$, $f(x)=\cos\alpha x$, $f(x)=\cosh\alpha x$ ニ限ルコトハヨク知ラレテヰル。茲ニ α ハ任意ノ實數トスル。

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{4}$$

次ニ(4)ニ幾何學的意味ヲ附ケテ見ヨウ。

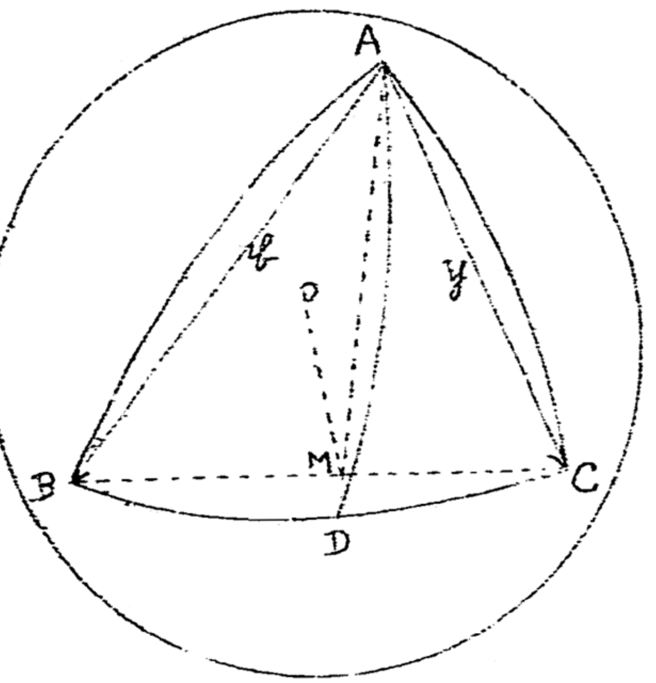


今球面O上ニ、球面三角形ABCヲ考ヘ、辺BCノ中点ヲDトスレバ

$$\cos b+\cos c=2\cos\tfrac{1}{2}a\cos AD$$

ナルコトハヨク知ラレテ居ル。茲ニ勿論 a, b, c ハ夫々三辺ノ張ル中心角デADトハ大円弧ADノ張ル中心角∠AODヲ意味スル。コノ定理ハ平面幾何學ニ於ケル*Pappas*ノ定理ニ當ルモノデアル。

今球面O上ノ一点Aヨリ、ヴエクトル $\overrightarrow{AB}$（x デアラハス）ヴエクトル $\overrightarrow{AC}$（y デアラハス）ヲ引キ、球面トノ交点ヲ夫々BCトスル。



球ノ弦BCノ中点ヲMトシOMノ延長ガ球面ト交ハル点ヲDトスレバ、Dハ大円弧BCノ中点トナル。ヴェクトル$\overrightarrow{AM}$ハ$\frac{x+y}{2}$デ表ハサレ、ヴェクトル$\overrightarrow{MB}$ハ$\frac{x-y}{2}$デ表ハサレル。

今、ヴェクトルヲ変数トスル實数値函数$f(x)$ヲ考へ、ヴェクトルxノOニ於テ張ル中心角ヲθトシ$f(x)=\cos\theta$トオケバ、上記球面三角法ノ定理ニヨリ、$f(x)=\cos\theta$ハ(4)ヲ満足セシメルコトガ判ル。

§5. 二次元 Euclid 平面上ノ任意ノ三角形ヲABCトシ、BCノ中点ヲDトスレバ

$$AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$$

ガ成リ立ツ。之レハ Pappus ノ定理ト呼バレ、有名ナモノデアル。

之ヲ複素数ヲ用ヰテ書ケバ

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

ト書ケル。以下点ヲアラハスニ、複素数ヲ用ヰルコトニスル。

今一点A（複素数$z=x+iy$デアラハス）ノ Norm ノ平方根（原点トノ距離）ヲ$\rho(z)$ニテ表ハシ，二点P(複

素数Z_1デ表ス)，Q(複素数 Z_2 デ表ス)ノ距離ヲ$\varphi(Z_1-Z_2)$デ定義シタ場合、Pappus ノ定理ヲ満足スル距離函数$\varphi(Z)^{Z_2}$ハ如何ナルモノカヲ考ヘヨウ。但シ$\varphi(Z)$ハx, yニツイテ夫々可測ナリトスル。

之ハ結局$\varphi(Z)$が、がうす平面上，$|Z|<+\infty$デ定義サレタ一價可測實函數トシタトキ、次ノ函數方程式ニ適スル(距離函數)$\varphi(Z)$ヲ求ムルコトトナル。

$$(5)\quad \varphi^2(Z_1+Z_2)+\varphi^2(Z_1-Z_2)=2\varphi^2(Z_1)+2\varphi^2(Z_2)$$

之ハ本誌 257 号 1144 デ論ジタコトニヨリ

$$\varphi(Z)=\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}$$

トナル。但シ$\varphi(Z)$ハ距離函數ナル故$a>0$, $b^2-4ac<0$ナルコト勿論デ之がアレバ、距離函數ノ條件ヲ満足サセルコトが判ル。

更ニ Phythagoras ノ定理ヲ満足スルコトヲ假定スレバ　容易ニ$\varphi(Z)=\sqrt{ax^2+bxy+ay^2}$ $(a>0,\ b^2-4a^2<0)$トナルコトが判ル。

更ニ、第二番目ノ條件トシテ線分ABノ垂直二等分線上ノ点ハA,Bヨリ等距離ニアルコトヲ假定スレバ$\varphi(Z)=\sqrt{a(x^2+y^2)}$ $(a>0)$トナル。

§6.　本誌第257号1144ニテ

$$(6)\quad \varphi(xZ-yu,\ xu+yZ)=\varphi(x,y)\varphi(Z,u)$$

ノ連續解トシテ

$$\varphi(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha}\quad(\alpha\geqq 0)$$

ヲ得ルコトヲ論ジタ。

次ニ、平面上ノ点ヲ複素数 $z=x+iy$ ニテ表ハシタ場合。

$\varphi(z)=\varphi(x,y)$ ヲ距離函数トシテ眺メヨウ。(6) ナル関係。(即チ複素数ノ絶對値ニ関スル性質 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ ヲ云ヒ換ヘタ関係) ヲ充セバ、常数ナラザル距離函数ハ $\varphi(z)=(x^2+y^2)^\alpha=|z|^{2\alpha}$ ($\alpha>0$) デアルコトハ所論ニヨリ明ラカデアル。コヽデ距離ノ三公理ヲ充ス條件トシテ $1\geqq\alpha>0$ ナルコトヲ注意シナケレバナラナイ。

サテ、コノ距離附ケニヨッテモ、平面幾何學ニ於ケル次ノ定理ガ成立スル。

(定理) 平面上ノ任意ノ四点ヲ A, B, C, D トシタトキ

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\geqq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

(証明) A, B, C, D ヲ夫々複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 デ表ハセバ次ノ恒等式ガ成立スル。

$$(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_2-z_3)(z_1-z_4)$$
$$=(z_1-z_3)(z_2-z_4)$$

コノ両辺ノ (φ ニヨル) 距離ヲトリ $\varphi(z_1z_2)=\varphi(z_1)\varphi(z_2)$, $\varphi(z_1+z_2)\leqq\varphi(z_1)+\varphi(z_2)$ ナル性質ヲ用ヰレバ、定理ハ証明サレル。

サテ、次ニコノ距離附ケ $\varphi(z)$ ガ普通ノ *Euclid* ノ距離附ケトナルタメニハ、即チ $\alpha=\frac{1}{2}$ トナルタメニハ、次ノ四條件ノ中、ドレカ一ツヲ附加スレバヨイ。條件 (A) ニツイテハ、本誌 257 号 1144 ニ於テ論ジタ。証明ハイヅレモ、計算ニヨリ $\alpha=\frac{1}{2}$ トナルコトガ容易ニ云ヘル。

(條件A)　$\varphi(1+i)=\sqrt{2}$

(條件B)　一直線上ノ三点ヲ順次ニA,B,Cトシタトキ

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$ (Chaslesノ関係)

(條件C)　一直線上ノ四点ヲ順次ニA,B,C,Dトシタトキ

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

(Eulerノ定理)

(條件D)　一ツノ円ニ内接スル四辺形ヲABCDトシタトキ　$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

(Ptolemyノ定理)

(條件D)ハ前述ノ定理ニ於テ等号ノ成立スル場合デアル。

§17.　一直線上ノ任意ノ三点ヲA,B,CトシタトキA,B,Cノ重心ヲGトスレバ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$$

トナルコトハヨク知ラレテヰル。

今$f(x)$ヲ$-\infty<x<+\infty$ニテ定義サレター價連續函數ナリトスルトキ．上記定理ヲ函數方程式ニテ表ハシタ次ノ(17)ナル式ヲ滿足スル函數$f(x)$ヲ求メテ見ヨウ。

$$(17)\quad f(x-y)+f(y-z)+f(x-z)=3\left\{f\left(\frac{x+y+z}{3}-x\right)+f\left(\frac{x+y+z}{3}-y\right)+f\left(\frac{x+y+z}{3}-z\right)\right\}$$

(17)ニ於テ$x=0$, $y=0$. $z=0$トオケバ　$f(0)=0$

(17)ニ於テxノ代リニ$x-y$, yノ代リニ$y-z$, zノ代リニ$z-x$トオケバ

$$f(x-2y+z)+f(y+x-2z)+f(2x-y-z)$$
$$=3f(-x+y)+3f(z-y)+3f(x-z)$$

上式ニ於テ $z=0$ トオケバ

(A) $$f(x-2y)+f(x+y)+f(2x-y)$$
$$=3f(-x+y)+3f(-y)+3f(x)$$

(A) ニ於テ $y=0$, $y=x$ トオケバ $f(0)=0$ ナル故、夫々

$$f(2x)=f(x)+3f(-x)$$
$$f(2x)=2f(x)+2f(-x)$$

ヲ得ル。

之レヨリ

$$f(x)=f(-x),\quad f(2x)=4f(x)$$

ヲ得ル。

コノ二ツノ式ト(A)トヲ基ニシテ數學的帰納法ヲ用キレバ任意ノ有理數 $\frac{m}{n}$ ニ對シ

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1)$$

之ヨリ $f(x)$ ノ連續性ニヨリ $f(x)=\alpha x^2$

茲ニ α ハ任意ノ實數デ丁度 $f(1)$ ニ當ル。

§8. 次ニ $f(x)=\int_0^{\pi}\log(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta$ ナル

函數ヲ考察シヨウ。此ノ積分ハ他ノ色々ナ方法デ、以下ニ述ベルヨリモ、モット簡單ナ方法デ計算出來ルガ、函數方程式ノ一ツノ應用トシテ、以下藤原松三郎先生微積分學第

一巻437Pノ「ヒント」ニ從ッテ述ベル。

先ヅ $f(x)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレタ x ノ連續函數ナルコトハ容易ニ證サレル。

次ニ $f(-x)=f(x)$ デアル。何者 與ヘラレタ式ニ於テ $\pi-\theta=t$ トオケバ

$$f(x)=\int_{\pi}^{0}\log(x^2+2x\cos t+1)(-dt)$$

$$=\int_{0}^{\pi}\log(x^2+2x\cos\theta+1)\,d\theta=f(-x)$$

又、$f(x^2)=2f(x)$ デアル。

何者 $2f(x)=f(x)+f(-x)$

$$=\int_{0}^{\pi}\log(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta+\int_{0}^{\pi}\log(x^2+2x\cos\theta+1)\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\log(x^4-2x^2\cos 2\theta+1)\,d\theta$$

茲デ、$2\theta=\varphi$ トオケバ

$$2f(x)=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\log(x^4-2x^2\cos\varphi+1)\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\pi}\log(x^4-2x^2\cos\varphi+1)\,d\varphi+\int_{\pi}^{2\pi}\log(x^4-2x^2\cos\varphi+1)\,d\varphi\right]$$

第二ノ積分ニ於テ、$2\pi-\varphi=t$ トオケバ

$$\int_{\pi}^{2\pi}\log(x^4-2x^2\cos\varphi+1)\,d\varphi$$

$$=\int_{\pi}^{0}\log(x^4-2x^2\cos t+1)(-dt)$$

$$=\int_0^{\pi} \log(x^4-2x^2\cos t+1)\,dt$$

$$\therefore \quad 2f(x)=\int_0^{\pi} \log(x^4-2x^2\cos\theta+1)\,d\theta = f(x^2)$$

故ニ $f(-x)=f(x)$, $f(x^2)=2f(x)$ ナル二式ガ証サレタ。

又 $f(x^2)=2f(x)$ ニ於テ、$x=1$ トオケバ $f(1)=0$

次ニ先ヅ $x>1$ ナル場合カラ始メル。$f(x^2)=2f(x)$ ニ於テ $x=e^t$ ナル変換ヲシ、且ツ $g(t)=f(e^t)$ トオケバ、$g(t)$ ハ $0<t<+\infty$ ニテ定義サレタ t ノ一價連續函數デ $g(2t)=2g(t)$, $g(0)=1$ ヲ満足スル。

更ニ $\varphi(t)=\dfrac{g(t)}{t}$ トオケバ $\varphi(2t)=\varphi(t)$ デ $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)$ $=a$ (有限確定値) ナルコトモ云ヘル。

$\varphi(2t)=\varphi(t)$ 即チ $\varphi(t)=\varphi\left(\dfrac{t}{2}\right)$ ヨリ任意ノ自然数 n ニ對シ

$$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$n\to+\infty$ ナラシムレバ $\varphi(t)\equiv a$

$$\therefore \quad g(t)=at$$

$$\therefore \quad f(x)=a\log x$$

故ニ $x>1$ デ

$$\int_0^{\pi} \log(x^2-2x\cos\theta+1)\,d\theta = a\log x$$

両辺ヲ x ニツイテ微分シテ $x=2$ トオケバ $a=2\pi$.

故ニ $x>1$ デ $f(x)=2\pi\log x=\pi\log x^2$

又前述ノ通リ $x=1$ ナラバ $f(x)=0$ ナルコトガ云ヘル。

結局 $x\geqq 1$ デハ $f(x)=\pi\log x^2$

次ニ $0<x<1$ デ $f(x)\equiv 0$ ナルコトヲ証シヨウ。

先ヅ $f(x^2)=2f(x)$ ニ於テ $x=0$ トオケバ $f(0)=0$ ナルコトガ判ル。

又 $f(x)=\frac{1}{2}f(x^2)$ ヨリ任意ノ自然数 n ニ對シ

$$f(x)=\frac{1}{2^n}f\left(x^{2^n}\right)$$

$n\to\infty$ ナラシムレバ $f(0)=0$ ナルニヨリ $f(x)\equiv 0$

$f(-x)=f(x)$ ヲ使ヘバ結局

$|x|<1$ デハ $f(x)\equiv 0$

$|x|\geqq 1$ デハ $f(x)=\pi\log x^2$

トナル。

——————（完）——————