1151. 積空間ニ於ケル積保測変換ニ就テ

河田　敬義（東京文理大）

$(\Omega, \mathfrak{B}, m)$, $(\Omega', \mathfrak{B}', m')$ $(m(\Omega) = m'(\Omega') = 1)$ ヲ測度空間，T, T' ヲ夫々ノ上デ定義サレタ保測変換トシ

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \bar{\Omega} \ni \bar{\omega} = (\omega, \omega'),\ \omega \in \Omega,\ \omega' \in \Omega'$$

ニ對シテ

$$\bar{T} = T \times T', \quad \bar{T}\bar{\omega} = (T\omega, T'\omega')$$

ト定義スレバ，$\bar{T}$ ハ $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{B}}, \bar{m})$ 上ノ保測変換トナル．此処ニ $\bar{m}$ ハ m ト m' トノ直積測度，$\bar{\mathfrak{B}}$ ハ $E \times E'$ $(E \in \mathfrak{B}, E' \in \mathfrak{B}')$ ヲ含ム最小ノ Borel 集合体トスル．

談話 1142 デハ T ガ混合型ノ場合ヲ考ヘタガ，一般ニ次ノコトガ成立ツ．

今 T ノ個有値 λ : $\phi(T\omega) = e^{i\lambda}\phi(\omega)$, $\phi \in L^2(\Omega)$

ノ全体ヲGトスレバGハ一ツノ群ヲ作ル。同様ニ，T', $\overline{T}$ニ對シテG', $\overline{G}$ヲ考ヘル。又Kヲ實數ヲ mod. 2πデ考ヘタ加法群トスルト，$G, G', \overline{G}$ハKノ部分群デアル。

［定理1］ $\overline{G}$ハK中ノG, G'ノ Kompositum $\{G, G'\}$ニ等シイ：

$$(1) \quad \overline{G}=\{G,G'\}=\{\lambda+\lambda' : \lambda\in G,\ \lambda'\in G'\}$$

［定理2］ T, T'ヲ夫々エルゴード的トスル。ソノトキ$\overline{T}$モ亦エルゴード的トナルタメノ必要十分條件ハ

$$(2) \quad G\cap G'=0$$

ナルコトデアル。

［系1］ T, T'ガ廣義混合型（即チエルゴード的デ$G=G'=0$）トラバ，$\overline{T}$モ亦廣義混合型トナル。

［系2］ Tガ廣義混合型（エルゴード的デ$G=0$）ナラ任意ノエルゴード的ナT'ニ對シテ$\overline{T}$モ亦エルゴード的トナル。逆モ亦眞。

コノ系ハ談話 114ノ定理2ニ他ナラナイ。

（定理1ノ証） (イ) $L^2(\Omega)$ヲxニ對シテ$U_x=x(T\omega)$トスレバ

$$(3) \quad U=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,dE_t$$

トアラハサレル。同様ニU', $\overline{U}$ヲT', $\overline{T}$カラ定義スレバ

$$(3') \quad U'=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,dE'_t,\quad \overline{U}=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,d\overline{E}_t$$

トアラハサレル。

之レカラ $\sigma_x(t)=(E_t x, x)$, $x\in L^2(\Omega)$ トスレバ

$$(4)\quad (Ux,x)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,d\sigma_x(t)$$

同様ニ

$$(4')\quad (U'x',x')=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,d\sigma'_{x'}(t),\quad (\bar U\bar x,\bar x)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,d\bar\sigma_{\bar x}(t)$$

トナル。

今、特ニ $\bar x = x\cdot x'$ トオケバ $\bar U$ ノ定義ヨリ

$$(5)\quad (\bar U\bar x,\bar x)=(Ux,x)(U'x',x')$$

トナルカラ

$$(\bar U\bar x,\bar x)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+t')}\,d\sigma_x(t)\,d\sigma'_{x'}(t')=\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\,d\bar\sigma_{\bar x}(t)$$

トナリ

$$(6)\quad \bar\sigma_{\bar x}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_x(t-s)\,d\sigma'_{x'}(s)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma'_{x'}(t-s)\,d\bar\sigma_{\bar x}(s)$$

トナル。

(6) ヨリ $\bar x = x\cdot x'$ ニ對シテハ $\bar\sigma_{\bar x}$ ノ不連續點ハ $\sigma_x(t)$, $\sigma_{x'}(t)$ ノ不連續點ノ和トシテアラハサレルモノ以外ニナイ。シカルニ夫等ハ夫々 G, G' ニ含マレルカラ $(\bar E_t\bar x,\bar x)$ ハ $\bar x = x\cdot x'$ ニ對シテハ $t\in\{G, G'\}$ 以外ニ不連續點ヲモタナイ。

一般ニ $L^2(\bar\Omega)\ni\bar y$ ニ對シテ

$$(7)\quad \lim\|\bar x_n-\bar y\|=0,\quad \bar x_n=x_n\cdot x'_n,\quad x_n\in L^2(\Omega),$$

$$x'_n\in L^2(\Omega')$$

トアラハサレルカラ

$$(8)\quad \bar{E}^{\lambda} = \bar{E}_{\lambda+0} - \bar{E}_{\lambda-0}$$

トオケバ

$\bar{E}^{\lambda}\bar{y} = \bar{y}$ ナル $\bar{y} \in L^2(\bar{\Omega})$ $(\bar{y} \neq 0)$ ガアレバ

$$0 < (\bar{y}, \bar{y}) = (\bar{E}^{\lambda}\bar{y}, \bar{y}) = \lim_{n\to\infty}(\bar{E}^{\lambda}\bar{x}_n, \bar{x}_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sigma_{\bar{x}_n}(\lambda+0) - \sigma_{\bar{x}_n}(\lambda-0)\right\}$$

ナル故，アルnデ

$$\sigma_{\bar{x}_n}(\lambda+0) - \sigma_{\bar{x}_n}(\lambda-0) > 0$$

トナリ，上ニ見タ様ニ $\lambda \in \{G, G'\}$ トナル。即チ $\bar{G} \subset \{G, G'\}$ デアル。

(ロ) 逆ニ $\bar{\lambda} \in \{G, G'\}$，即チ $\bar{\lambda} = \lambda + \lambda'$，$\lambda \in G$, $\lambda' \in G'$

トスレバ

$$Ux = e^{i\lambda}x, \quad (x \in L^2(\Omega)), \quad U'x' = e^{i\lambda'}x'$$
$$(x' \in L^2(\Omega'))$$

ヲトレバ，$\bar{x} = x\cdot x' \in L^2(\bar{\Omega})$ ニ對シテ

$$\bar{U}\bar{x} = Ux\cdot U'x' = e^{i(\lambda+\lambda')}xx' = e^{i\bar{\lambda}}\bar{x}$$

トナル。即チ $\bar{G} \supset \{G, G'\}$ トナル。 q.e.d.

(定理2ノ証) (イ) $\bar{T}$ ガエルゴード的ナルタメニ $G \cap G' = 0$ ガ必要ナコトハ，$G \cap G' \ni \lambda \neq 0$ トスレバ

$$Ux = e^{i\lambda}x,\ x \in L^2(\Omega),\ U'x' = e^{i\lambda}x',\ x' \in L^2(\Omega')$$

トスレバ，T' ガエルゴード的ナルコトカラ $|x'(\omega)| = const.\ a.e.$

トナルカラ

$$\bar{x} = \frac{x}{x'} \in L^2(\bar{\Omega}) \text{ ハ } \bar{x} \neq const,\ \bar{U}\bar{x} = \bar{x} \text{ ヲ満足}$$

シテシマフコトカラワカル。

(ロ) T, T' ガエルゴード的デ且ツ $G \cap G' = 0$ トスルト ((8) ノ記号ニヨッテ)).

$$\sigma_x(+0) - \sigma_x(-0) = \| E^\circ_x \|^2 = |(x, 1)|^2$$

$$\sigma'_{x'}(+0) - \sigma'_{x'}(-0) = \| E'^\circ x' \|^2 = |(x', 1)|^2$$

トナルカラ, $G \cap G' = 0$ ト合セテ (6) ヨリ $\bar{x} = x \cdot x'$ ニ對シテ

(9) $\bar{\sigma}_{\bar{x}}(+0) - \bar{\sigma}_{\bar{x}}(-0) = \| \bar{E}^\circ \bar{x} \|^2 = |(x, 1)|^2 |(x', 1)|^2 = |(\bar{x}, 1)|^2$

トナル。

今 $\bar{U}\bar{y} = \bar{y}$ ト $\bar{E}^\circ \bar{y} = \bar{y}$ トハ同値デアルカラ, const. 以外ニ $\bar{U}\bar{y} = \bar{y}$ ナル $\bar{y} \in L^2(\bar{\Omega})$ ガ存在シタトスレバ, ソレヲ成分ニ分ケルコトニヨリ, 豫メ

(10) $(1, \bar{y}) = 0, \quad \bar{y} \neq 0$

ト假定シテ差支ヘナイ。(7) ノ様ニ $\bar{x}_n$ ヲトルト

(9) ヨリ $\| \bar{E}^\circ \bar{x}_n \|^2 = |(x_n, 1)|^2$ デアルカラ, (7) ト合セテ

$$\lim \| \bar{E}^\circ \bar{x}_n \|^2 = \lim |(\bar{x}_n, 1)|^2 = (\bar{y}, 1) = 0$$

トナルガ, 他方 $\bar{E}^\circ$ ノ連續性カラ

$$\lim \| \bar{E}^\circ \bar{x}_n \|^2 = \| \bar{E}^\circ \bar{y} \|^2 = \| \bar{y} \|^2 > 0$$

トナリ矛盾ヲ生ジタ。故ニ $\bar{T}$ モ亦エルゴード的デナタデバナラヌ。 q.e.d.

(注意) 談話 1142「混合型保測変換ノ二, 三ノ性質」デノ結果 (定理 2) ハ上ノヤウニスペクトルノ理論ヲ用ヒレ

バ，ヨリ一般ナ結果ノ系トナッテシマヒマスカラ，アノ談話ハ混合型保測変換ノ性質ヲ成ルベク純集合論的ニ扱フタメノ証明ヲ企テタモノト考ヘナイ限リ意味ハナイト思ハレマス。

定理1ハ E. Hopf等ニヨッテ既ニ知ラレテ井タ結果デアルコトガ分リマシタ。定理1デハ固有値トノ関係ヲ用ヒマシタが，ソレナシニモ（E. Hopf等ノ方法デ）ノ廣義混合型トイフコトヽ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\lambda}x_B(T^k\omega)=0\quad(\lambda\neq 0,\ \mathrm{mod.}\ 2\pi)$$

トノ同値ナコトが出来ルワケデス。（E. Hopf, On Causality, Statistics and Probability 参照）

（18，9，25）