1147. 河口空間ノ共形幾何學 V

岩本 秀行（東大）

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{F}}\Gamma_{i1}\left(dx^{(1)i} + \Gamma_j^i dx^j\right)$$

トオケバ ω ハ座標変換デ scalar デ共形変換デ不変，parameter ノ変換デ

$$\overline{\omega} = d\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)\Big/\frac{dt}{d\bar{t}} + \omega$$

ノ如ク変換スル。從ッテ v^i ガ parameter ノ変換デ重サ p ノ intrinsic ナ vector ナラバ

$$\tilde{\delta} v^i = dv^i + \mathcal{D}\Gamma_j^i v^j - p v^i \omega$$

ハヤハリ重サ p ノ intrinsic ナ vector デアル。

$$'\delta x^{(M)\lambda} = g^{ia}\mathcal{F}^{2(M-1)}F\left(\delta F_{(M)a} + (M-1)F_{(M)a}\omega\right)$$

ハ intrinsic ナ base connection ヲ與ヘル。併シ conformal invariant デナク

$$'\delta x^{(M)i} = {}'\delta x^{(M)i} + \frac{d\rho}{\rho}\mathcal{F}^{2(M-1)}F g^{ia}F_{(M)a}$$

$$'\delta x^{(M)i} = \left(\delta_j^i + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}}\Gamma_{j1}\right)dx^{(M)j} + \sum_j {}'\overset{p}{\underset{M}{\Lambda}}{}_j^i\, dx^{(p)j}$$

トオケバ

$$\overline{{}'\overset{p}{\underset{M}{\Lambda}}{}_j^i} = {}'\overset{p}{\underset{M}{\Lambda}}{}_j^i + \frac{\rho_{(p)j}}{\rho}\sigma^j,$$

$$\sigma^j = \mathcal{F}^{2(M-1)}F g^{ja}F_{(M)a}$$

之ヲ用ヒテ scalar $d\Phi$ ヲ $(\overline{\Phi} = \Phi_1)$

$$d\Phi = \sum_{r=0}^{M-1} {}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi \cdot \delta x^{(r)i} + {}'\overset{M}{\nabla}_i \Phi \cdot {}'\delta x^{(M)i}$$

ト分解スレバ

$$\begin{cases} \overline{{}'\overset{M}{\nabla}_i \Phi} = {}'\overset{M}{\nabla}_i \Phi \\ \overline{{}'\overset{M-1}{\nabla}_i \Phi} = {}'\overset{M-1}{\nabla}_i \Phi - \dfrac{\rho_{(M-1)i}}{\rho} \sigma \\ \overline{{}'\overset{M-2}{\nabla}_i \Phi} = {}'\overset{M-2}{\nabla}_i \Phi - \dfrac{1}{\rho} \overset{M-2}{\nabla}_i \rho \cdot \sigma \\ \text{- - - - - - - - -} \\ \overline{{}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi} = {}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi - \dfrac{1}{\rho} \overset{r}{\nabla}_i \rho \cdot \sigma \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \end{cases}$$

$$\sigma = \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ij} F_{(M)j} \Phi_{(M)i}$$

$$\overline{\sigma}^j = \sigma^j, \quad \overline{\sigma} = \sigma$$

即チ
$$-\frac{1}{\rho} \overset{r}{\nabla}_i \rho = \frac{1}{\sigma} \left[\overline{{}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi} - {}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi \right]$$

$$-\frac{1}{\rho} d\rho = -\frac{1}{\rho} \sum_{r=0}^{M-1} \overset{r}{\nabla}_i \rho \, dx^{(\nu)i}$$

ニヨリ
$$-\frac{1}{\rho} d\rho = \sum_{r=0}^{M-1} \overline{{}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi} \, \delta x^{(r)i} - \sum_{r=0}^{M-1} {}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi \, \delta x^{(r)i}$$

(ρ ガ次數 λ ナラ r ハ $0 \leqq r \leqq \lambda$)

從ッテ

$$\delta x^{(M)i} = {}'\delta x^{(M)i} + \frac{\sigma_i}{\sigma} \sum_{r=0}^{\lambda} {}'\overset{r}{\nabla}_i \Phi \, \delta x^{(r)i} = \left(\delta_j^i + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{j'} \right) dx^{(\nu)i}$$

ハ conformal invariant, intrinsic デアル。

$\Phi = e$ トオケバ

$$\frac{\sigma^i}{\sigma} = \frac{1}{\Lambda'} F^M g^{ja} \mathring{E}_{aM}$$

コノ方法デハ $\Lambda' \neq 0$ ヲ仮定シナケレバナラナイ。併シ次ノ様ニスレバコノ仮定ナシニ出来ル。

Pfaffian $\Omega = \sum_{r=0}^{M} P_{rj}\, dx^{(r)j}$ ニ對シ

$$\frac{d}{dt}\Omega = \sum_{r=0}^{M+1} \left(P_{(r)j}^{\;\;(1)} + P_{(r-1)j} \right) dx^{(r)j}, \quad (P_{-1j} = P_{M+1,j} = 0)$$

ト定義スル。

定理. Ω ガ変換 $x^{(\bar{\mu})i} = a^{\mu}_{\nu} x^{(\nu)i}$,

$$dx^{(\bar{\mu})i} = a^{\mu}_{\nu}\, dx^{(\nu)i} + \sum_{\omega} a^{\mu}_{\nu\omega}\, da^{\omega} \cdot x^{(\nu)i}$$

ニ對シテ invariant ナラ

$$\frac{d}{dt}\left[\Omega + \frac{1}{\mathcal{F}_1} \frac{\delta\Omega}{dt} \Gamma_{i1}\, dx^i\right]$$

モ同ジ変換ニ對シ invariant デアル。

定理. Ω^i ガ i ニツキ Vector 性ヲモツ Pfaffian ナラバ

$$\frac{\delta\tilde{\Omega}^i}{dt} = \frac{d\tilde{\Omega}^i}{dt} + \Gamma_j^{\,i}\, \tilde{\Omega}^j$$

モ i ニツキ Vector 性ヲモチ、Ω^i ガ intrinsic ナラ $\frac{\delta\tilde{\Omega}^i}{dt}$ モ intrinsic デアル。コヽニ

$$\widetilde{\Omega}^i = \Omega^i + \mathcal{F}^{-1}\frac{\Omega^i}{dt}\Gamma_{j1}\,dx^j$$

之レカラ

$$\frac{\delta}{dt}\delta x^{(M-1)i} = \frac{d}{dt}\left(\delta x^{(M-1)i} + \frac{1}{\mathcal{F}}\frac{\delta x^{(M-1)i}}{dt}\Gamma_{k1}\,dx^k\right)$$

$$+\Gamma_j^i\left(\delta x^{(M-1)j} + \frac{1}{\mathcal{F}}\frac{dx^{(M-1)j}}{dt}\Gamma_{k1}\,dx^k\right)$$

$$-(M-1)\frac{\mathcal{F}^{(1)}}{\mathcal{F}}\left(\delta x^{(M-1)i} + \frac{1}{\mathcal{F}}\frac{\delta x^{(M-1)i}}{dt}\Gamma_{k1}\,dx^k\right)$$

ニヨリ

$$\delta x^{(M)i} = \left(\delta_j^i + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}}\Gamma_{j1}\right)dx^{(M)j} + \sum_{p=0}^{M-1}\overset{p}{\underset{M}{\Lambda}}{}_j^i\,dx^{(p)j}$$

ナル base connection ヲ得ル.

v^i ヲ重サ 0 ノ intrinsic ナ vector トスレバ δv^i ハ

$$\delta v^i = \sum_{p=0}^{M}\overset{p}{\nabla}_j v^i\,\delta x^{(p)j}$$

ト分解サレル. コヽニ

$$\begin{cases} \overset{M}{\nabla}_j v^i = v^i{}_{,(M)j} \\ \overset{p}{\nabla}_j v^i = v^i{}_{,(p)j} + \Gamma^i_{k(p)j}v^k - \sum_{\lambda=p+1}^{M}\overset{\lambda}{\nabla}_k v^i\,\overset{p}{\underset{\lambda}{\Lambda}}{}^k_j \end{cases}$$

v^i ガ parameter ノ変換デ重サ p, 共形変換デ重サ q ノ intrinsic ナ vector ナラバ

$$\tilde{\delta} v^i = \delta v^i - p v^i\omega - q v^i\sum_{r=0}^{\alpha}K^{-1}\overset{r}{\nabla}_j K\,\delta x^{(r)j}$$

ハ v^i ノ invariant ナ共變微分ヲ定義シ, 共變微係數ハ

$$
\begin{cases}
\tilde{\overset{r}{\nabla}}_j v^i = \overset{r}{\nabla}_j v^i, & (\alpha+1 \leqq r \leqq M) \\
\tilde{\overset{r}{\nabla}}_j v^i = \overset{r}{\nabla}_j v^i - \dfrac{q}{\kappa} v^i \overset{r}{\nabla}_j \kappa. & (2 \leqq r \leqq \alpha) \\
\tilde{\overset{1}{\nabla}}_j v^i = \overset{1}{\nabla}_j v^i - \dfrac{q}{\kappa} v^i \overset{1}{\nabla}_j \kappa - \dfrac{p}{\mathcal{F}} v^i \Gamma_{j1} \\
\tilde{\overset{0}{\nabla}}_j v^i = \overset{0}{\nabla}_j v^i - \dfrac{q}{\kappa} v^i \overset{0}{\nabla}_j \kappa + \dfrac{p}{\mathcal{F}} v^i \overset{(1)}{\Gamma}_{j1}
\end{cases}
$$

ヲ定義サレル. 此等ハスベテ次數 α 以下ノ共形變換ニ對シ不變デアルが, 次數 $\alpha+1$ 以上ノ變換ニ對シ不變デハナイ.

我々ハコヽデ $M \geqq 4$, $n \geqq 3$ ニ對シ次數 α 以下ノ共形變換デ不變ナル擬似接續

$$\delta v^i = d v^i + \Theta \Gamma_j^{\ i} \cdot v^j$$

$$\delta x^{(r)i} = \left(\delta_j^i - \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{j1}\right) dx^{(r)j} + \sum_{p=r+1}^{M} \overset{p}{\underset{r}{\Lambda}}{}^i_j \, dx^{(p)j}$$

が與ヘラレ conformal invariant ナ基本テンソル

$$g_{ij} = \kappa^{-2} g_{ij}$$

デ metric σ ノ與ヘラレル河口空間ヲ組立テタワケデアル. コノ空間ヲ C_α トカクコトニスル。

定理. 二ツノ河口空間 F, $\bar{F}$ が次數 α ノ共形變換デ共形的トナルタメニ必要且ツ充分ナル條件ハ C_α, $\bar{C}_\alpha$ が幾何的ニ同ジ空間トナルコトデアル.

証明. 充分ナルコトヲ云ヘバヨイ。C_α, $\overline{C}_\alpha$ ノ對應スル点ヲ同ジ座標デ表ハセバ(對應スル曲線上ノ点ノ parameter モ同ジニトル)

$$\overline{g}_{ij}=g_{ij}, \quad \text{従ッテ} \quad \overline{\mathcal{F}}^2=\mathcal{F}^2$$

$$\overline{\delta x}^{(M-1)i}=\delta x^{(M-1)i}, \quad \frac{\delta x^{(M-1)i}}{dt}=-\mathcal{F}^{2M}g^{ij}\frac{F_{(M)j}}{F}$$

ニヨリ

$$\left(\frac{\overline{F_{(M)i}}}{F}\right)=\frac{F_{(M)i}}{F}$$

故ニ $\overline{F}=\rho F$ トオケバ $\rho_{(M)i}=0$.

又 $\overline{\delta x}^{(1)i}=\delta x^{(1)i}, \cdots\cdots \overline{\delta x}^{(M-\alpha-1)i}=\delta x^{(M-\alpha-1)i}$

ヨリ $\rho_{(M-1)i}=0, \cdots\cdots \rho_{(\alpha+1)i}=0$ ヲ得ル。

即チ $\overline{F}=\rho(x, x^{(1)}, \cdots\cdots, x^{(\alpha)})F$

以上ハ $M\geqq 4$, $n\geqq 3$ ナル場合ノ議論デアル。シカシ intrinsic ナベクトル e カラツクラレル Synge ノベクトル $e_{i\mu}$ ハスベテ $e_{i\mu}x^{(1)i}=0$ ヲ満足スルカラ $\widetilde{E}_{i\mu}$ ノ代リニ之ヲ用フレバ

$$\begin{vmatrix} (e_M, e_M) & (e_M\, e_{M-1}) \\ (e_{M-1}, e_M) & (e_{M-1}\, e_{M-1}) \end{vmatrix}$$

カラ $\mathcal{F}$ ガ導カレ, 之ハ $M\geqq 2$, $n\geqq 3$ ノ場合ニ適用サレル。又 $n=2$ ノ場合ニハ

$$\mathcal{E}_{iM-1} = \kappa^{M-1}_{M-1}(e)\, b_{iM-1} + \kappa^{M}_{M-1}(e)\, b_{iM}$$

$$'\mathcal{E}_{iM} = \kappa^{M-1}_{M-1}(e)\, E_{iM-1}(e) + \kappa^{M}_{M-1}(e)\, E_{iM}(e)$$

ハ夫々 $M \geqq 3$, $M \geqq 2$ ニ對シ次數 $M+2$ ノ conformal invariant ナ path ヲ表ハス。($n \geqq 3$ ナラ path ノ projective class ヲ表ハサナイ). 之ヲ用ヒテ前ト同様ナ議論デ接續ヲ決定スルコトが出來ル。