1144. 或ル種ノ函數方程式及ビ函數不等式ニ就イテ

春木　博（神戸高等商船學校）

以下未整理ノマヽ誠ニ雜然トシテヰルが，種々ナル函數方程式ヲ適當ナル條件ノ下ニ解イテ見ヨウ。

§1.　$f(x)$ が $|x|<1$ デ，定義サレタ一價可測函數ナルトキ，次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[1]\quad f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)+f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)=2f(x)$$

此ノ方程式ハ $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=f(x)+f(y)$ ト同値デアルコトハ容易ニ示サレル。

$x=\dfrac{1-t}{1+t}$ ナル變換ニヨッテ，$|x|<1$ ハ $t>0$ ニ移ル。

[1] ニ於テ，x ノ代リニ $\dfrac{1-x}{1+x}$，y ノ代リニ $\dfrac{1-y}{1+y}$ トオケバ

$$f\left(\frac{1-xy}{1+xy}\right)+f\left(\frac{1-\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}\right)=2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$g(x)=f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ トオケバ $g(x)$ ハ $x>0$ デ，定義サレタ一價可測實函數デ、シカモ次ノ函數方程式ヲ滿足サセル。

$$g(xy)+g\left(\frac{x}{y}\right)=2g(x)$$

上式ニ於テ，$y=x$ トオケバ

$$g(x^2)=2g(x)-C \quad (\text{但シ } C=g(1)) \cdots\cdots (1)$$

又，x ノ代リニ xy，y ノ代リニ $\frac{x}{y}$ トオケバ

$$g(x^2)+g(y^2)=2g(xy)$$

上式ヘ (1) ヲ代入スレバ

$$g(x)+g(y)-C=g(xy)$$

$h(x)=g(x)-C$ トオケバ

$$h(x)+h(y)=h(xy)$$

$h(x)$ ハ可測ナル故，之ヨリ $h(x)=\alpha \log x$（但シ α ハ任意ノ實常數）

$$h(x)\longrightarrow g(x)\longrightarrow f(x) \text{ トカヘルコトニヨリ}$$

$$f(x)=\alpha \log \frac{1-x}{1+x}+C \quad (\alpha, C \text{ ハ任意ノ実常數})$$

次ニ，コノ函數方程式ニ対シ，幾何學的意味付ケヲシテ見ヨウ。今 $|x|<1$ ナルスベテノ實數ニ對シ，$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ トスルトキ

$$\alpha(\alpha,\beta)=\frac{1}{\log\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\right|}$$

ナル距離付ケヲシヨウ。

之ハ Green 幾何學ニ於テ用ヰラレル。スルト，容易ナ計算ニヨリ，コノ意味ニ於テ二点 $\frac{x+y}{1+xy}$，$\frac{x-y}{1-xy}$ ノ中点

ハxトナル。

一方 $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$, $f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$ ノ中点ハ普通ノ Euclid ノ意味ニ於テ, $f(x)$トナルコトハ〔1〕ノ函数方程式ヨリ判ル。結局 $f(x)$ヲ $|x|<1$ ナル實數ヲウツス一價可測寫像トスルトキ, Green 幾何ニ於ケル意味ニ於テ二点ノ中点ヲ Euclid ノ意味ニ於テ中点ニウツス寫像ハ $\alpha\log\dfrac{1-x}{1+x}+c$ ニ限ルコトガ判ル。

§2. 次ニ, $f(x)$ヲ $|x|<1$ デ定義サレタ一價微分可能ナル函数トスルトキ

$$〔2〕\quad f(x)+f(y)=f\left(\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right)$$

ニ適スル函數 $f(x)$ヲ求メテ見ヨウ。

〔2〕ヲ y ニツイテ微分シテ $y=0$ トオケバ $f'(x)=\dfrac{f'(0)}{\sqrt{1-x^4}}$

〔2〕ニ於テ $x=0,\ y=0$ トオケバ $f(0)=0$

故ニ $$f(x)=c\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

茲ニ cハ任意ノ實常數ナリトスル。

コノ函數ハ連珠形ノ弧長ヲ求メルトキ, 出テクル函數デアル。

次ニ $f(x)$ヲ $-\infty<x<+\infty$ デ定義サレタ二回微分可

能ナ函数トスルトキ，次ノ函数方程式ヲ満足セシメルモノヲ求メテ見ヨウ。

〔3〕 $$f^4(x)+f^4(y)+f^4(x+y)-2f^2(y)f^2(x+y)-2f^2(x+y)f^2(x)-2f^2(x)f^2(y)+4f^2(x)f^2(y)f^2(x+y)=0$$

コノ函数方程式ハ又次ノ如ク二モ書ケルコトハ明カデアル。

$$\{f(x+y)+f(x)+f(y)\}\{f(x)+f(y)-f(x+y)\}\{f(y)+f(x+y)-f(x)\}\times\{f(x+y)+f(x)-f(y)\}=4f^2(x)f^2(y)f^2(x+y)$$

常数解 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ除キ $f(0)=0$ ナルコトハ容易ニ判ル。

〔3〕ヲ y ニツイテ二回微分シテ、$y=0$ トオケバ $f(0)=0$ ナル故

$$f'^2(x)=\alpha^2\{1-f^2(x)\} \qquad 茲ニ \alpha=f'(0)$$

之ヨリ $\quad f(x)=\sin\alpha x$

以上ヲ綜合スレバ

$$f(x)\equiv\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f(x)\equiv-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f(x)=\sin\alpha x$$

（但シ α ハ任意ノ常数）ガ求ムル解ノ凡テデアル。

§3. 次ニ，$f(x)$ ヲ原点ノ近傍デ原点ヲ除キ，一價正則ナルトキ，次ノ函数方程式ヲ満足セシメルモノヲ求メテ見ヨウ。

〔4〕 $$f(x+y)+f(x-y)=\frac{2f(x)f^2(y)}{f^2(y)-f^2(x)}$$

〔4〕ニ於テ $y \to x$ ナラシメルコトニヨリ，原点$f(x)$ノ極ナルコトヲ知ル。

ヨッテ $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ トオケバ $h(x)$ ハ原点ノ近傍デ一價正則ニシテ $h(0)=0$，且ツ

$$\frac{1}{h(x+y)}+\frac{1}{h(x-y)}=\frac{2h(x)}{h^2(x)-h^2(y)}$$

ヲ満足セシメル。

上式ヲ y ニツイテ二回微分シ $y=0$ トオケバ

$$h''(x)\,h(x)-2h'^2(x)+2\alpha^2=0 \qquad (\text{但シ } \alpha=h'(0))$$

之ヲ $f(x)$ ニ書キ直セバ

$$f''(x)=2\alpha^2 f^3(x)$$

之ヨリ $f(x)$ ノ有理型解ヲ求ムレバ

$$f(x)=\frac{c}{x}$$（但シ c ハ0ナラザル複素常数ナリトスル）

§5. 次ニ，$f(x)$ヲ原点ノ近傍デ，原点ヲ除キ一價正則ナル函数トシ，次ノ函数方程式ヲ満足サセルモノヲ求メテ見ヨウ。

[5] $$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+\frac{f''(x)}{f'(x)-f'(y)}$$

〔4〕ト全ク同様ニシテ

$$f(x)=\zeta(x)+ax+b$$

ヲ得ル。茲ニa, bハ任意ノ複素常数デアル。$\zeta(x)$ハ楕円函数論ニ出テ来ル函数デアル。

次ニ，$f(x)$ ヲ $x>0$ デ定義サレタ一價可測實函數ナルトキ，次ノ函數方程式ヲ滿足セシメルモノヲ求メテ見ヨウ。

§6. $f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=2f(x)f(y)$

$g(x)=f(e^x)$ トオケバ，$g(x)$ ハ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレタ一價可測實函數デ [6] ニヨリ次ノ函數方程式ヲ滿足セシメルコトガ判ル。

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y)$$

之レヨリ $g(x)\equiv 0$, $g(x)=\cos\alpha x$, $g(x)=\cosh\alpha x$ ヲ得ル。但シ α ハ任意ノ常數ナリトスル。

之ヨリ $f(x)=0$, $f(x)=\cos(\alpha\log x)$,

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^{\alpha}+x^{-\alpha})$$

§17. 平面三角法ノ問題ニ $x+y+z=\pi$ ナラバ

$$\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z+2\cos x\cos y\cos z=1$$

デアルト云フノガアル。之ヨリ z ヲ消去シテ $x+y$ ヲ xy ニカヘタ次ノ函數方程式ヲ考ヘテ見ヨウ。但シ $f(x)$ ハ $x=1$ ノ近傍デ定義サレタ二回微分可能ナル函數トスル。

[7] $f^2(x)+f^2(y)+f^2(xy)-2f(x)f(y)f(xy)=1$

[7] ニ於テ $f(x)\equiv-\frac{1}{2}$ ヲ除ケバ $f(1)=1$ ナルコトハ容易ニ判ル。

[7] ヲ y ニツイテ微分シテ $y=1$ トオケバ $f(1)=1$ ヲ

使ッテ

$$f'(1)-f'(1)f^2(x)=0$$

之ヨリ　$f'(1)=0$　　（常数解ノトキハ，勿論 $f'(1)=0$）

［7］ヲ二回 y ニツイテ微分シテ $y=1$ トオキ，$f(1)=1$, $f'(1)=0$ ヲ使ヘバ

$$2x^2 f'^2(x)=f''(0)f^2(x)-f''(0)$$

コノ微分方程式ハ変数分離型トナル故，$f(1)=1$, $f'(1)=0$ ノ下ニトケバ $f(x)=\dfrac{x^{\alpha}+x^{-\alpha}}{2}$ 又ハ $f(x)=\cos(\alpha\log x)$ トナル。

茲ニ α ハ任意ノ實常數ナリトスル。

次ニ $f(x)$ ガ原点ノ近傍ニ於テ純單調ナルトキハ，［6］ト［7］トハ同値ナルコトヲ証明シテ見ヨウ。

［6］ヨリ［7］ガ出ルコト．　［6］ニ於テ，x ノ代リニ xy，y ノ代リニ $\dfrac{x}{y}$ トオケバ

$$f(x^2)+f(y^2)=2f(xy)f\left(\frac{x}{y}\right)$$

［6］ニ於テ $y=x$ トオケバ $f(x^2)=2f^2(x)-1$（$f(x)\equiv 0$ ノトキヲ除ケバ $f(1)=1$．シカモ $f(x)\equiv 0$ ハ條件ニ反スル）

コノ二ツヨリ　$f(xy)f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f^2(x)+f^2(y)-1$

上式ト［6］トヨリ $f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ヲ消去スレバ［7］ヲ得ル。

［7］ヨリ［6］ガ出ルコト．　［7］ニ於テ $x=1$, $y=1$ トオケ

バ $f(1)=1$ ナルコトガ判ル。（$f(1)=-\frac{1}{2}$ モ得ルガ，コノトキハ $f(x)\equiv-\frac{1}{2}$ トナリ，之モ條件ニ反スル）

〔7〕ニ於テ $y=\frac{1}{x}$ トオケバ $f(1)=1$ ナルコトカラ $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 更ニ〔7〕ニ於テ y ノ代リニ $\frac{1}{y}$ トオケバ $f\left(\frac{1}{y}\right)=f(y)$ ナルコトカラ

$$f^2(x)+f^2(y)+f^2\left(\frac{x}{y}\right)-2f(x)f(y)f\left(\frac{x}{y}\right)=1$$

上式ト〔7〕トヨリ原点ノ適當ナ近傍ニ於テ $f(xy)\neq f\left(\frac{x}{y}\right)$ ナルコトカラ（純單調性ニヨル）

$$f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=2f(x)f(y)$$

何者 二次方程式 $t^2-2f(x)f(y)t+f^2(x)+f^2(y)-1=0$ ノ二根ハ $f(xy)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ トナルカラ。

§8. 次ニ $f(x)$, $\varphi(x)$ ヲトモニ，$x>0$ デ定義サレタ一價可測實函數ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ヲ滿足セシメルモノヲ求メテ見ヨウ。

$$[8] \quad f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=2f(x)\varphi(y)$$

$g(x)=f(e^x)$, $\psi(x)=\varphi(e^x)$ トオケバ〔8〕ヨリ

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)\psi(y)$$

$g(x)$, $\psi(x)$ ハトモニ可測ナル故，次ノ解ヲ得ルコトハヨク知ラレテヰル。

$$\begin{cases} g(x) \equiv 0 \\ \psi(x) \text{ ハ任意} \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x \\ \psi(x) = \cos\alpha x \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = a\cdot\cosh\alpha x + b\sinh\alpha x \\ \psi(x) = \cosh\alpha x \end{cases}$$

之ヨリ

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ \varphi(x) \text{ ハ任意} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = a\cos(\alpha\log x) + b\sin(\alpha\log x) \\ \varphi(x) = \cos(\alpha\log x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = ax^{\alpha} + bx^{-\alpha} \\ \varphi(x) = \frac{1}{2}(x^{\alpha} + x^{-\alpha}) \end{cases}$$

茲ニ a, b, α ハ任意ノ實常數ナリトスル。

$x > 0$ デ微分方程式 $x^2y'' + xy' + y = 0$ ノ解ヲ求メルニハ，$x = e^t$ ナル〔8〕ヲトクノト同ジ変換ニヨッテ，結局 a, b ヲ任意ノ常數トスルトキ $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ トナルカラ面白イ。

§9. 次ニ $f(x)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$ ニテ定義サレター價可測函數ナリトシ，次ノ函數方程式ヲ滿足セシメルモノヲ求メヨウ。

〔9〕 $f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x) + f(y) - 2f(x)f(y)\}$

$f(x) = \frac{1}{2}\{1 - g(x)\}$ トオケバ $g(x)$ ハ一價可測實函數デアリ，且ツ〔9〕ニヨリ次ノ函數方程式ヲ滿足セシメル。

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$$

之ヨリ $g(x) \equiv 0$，$g(x) = \cos\alpha x$，$g(x) = \cosh\alpha x$

即チ　$f(x)\equiv\frac{1}{2}$，$f(x)=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha x)$，

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-\cosh\alpha x)=-\sin^2 h\frac{\alpha x}{2}$$

結局，求ムル解ハ

$$f(x)\equiv\frac{1}{2},\ f(x)=\sin\frac{2\alpha x}{2}=hav\,\alpha x,\ f(x)=-\sin^2 h\,\alpha x$$

茲ニ α ハ任意ノ實常數ナリトスル。

$hav\,\theta$ ハ $\sin^2\frac{\theta}{2}$ ヲアラハシ，航海術ニ用ヒラレル函數デアル。

§10. 次ニ，$f(x)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレタ一價可測實函數トスルトキ，次ノ函數方程式ヲ滿足サセルモノヲ求メヨウ。

〔10〕 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)-f(x)-f(y)+1$

$f(x)=\frac{1}{2}\{1+g(x)\}$ トオクコトニヨリ〔9〕ト全ク同樣ニ論ジテ

$$f(x)\equiv\frac{1}{2},\ f(x)=\cos^2\alpha x,\ f(x)=\cos h^2\alpha x$$

ヲ得ル。茲ニ α ハ任意ノ實常數ナリトスル。

§11. 次ニ，$f(x)$ ヲ $x>0$ ニテ定義サレタ一價實函數ナリトシ，且ツ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\Gamma(x)}=1$ ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ヲ滿足サセル $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。茲ニ $\Gamma(x)$ ハ

がんま函數$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ヲ表ス。

〔11〕 $f(x+1)=xf(x)$

$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\Gamma(x)}$トオケバ〔11〕ヨリ

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)$$

之ヨリ任意ノ自然數nニ對シ

$$\varphi(x+n)=\varphi(x)$$

又假定ニヨリ$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$. $\varphi(x)=\varphi(x+n)$ノ両辺ニ於テ$n\longrightarrow+\infty$トスルコトヨリ $\varphi(x)\equiv1$ 即チ$f(x)=\Gamma(x)$

§12. 以前筆者ハ全國紙上數學談話會ニ於テ，$\Gamma(x)=e^x$ヲカケタ函數ノ滿足スル函數方程式ヲ論ジタが，次ニハ$\Gamma(x)=x$ヲカケタ函數ノ滿足スル函數方程式ニツイテ論ジヨウ。

$f(x)$ヲ$x>0$デ定義サレタ一價實函數デ

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x\Gamma(x)}=1$ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ヲ滿足スル函數ハ$x\Gamma(x)$ニ限ル。證明ハ全ク〔11〕ト同ジデアル。

〔12〕 $f(x+1)=(x+1)f(x)$

§13. 次ニハ，二変數ノ函數ニ就イテ論ジヨウ。

$f(x,y)$ヲ$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$デ定義サレタ一

價實函數トシ，且ツx及ビyニツイテ，夫々可測ナルトキ次ノ函數方程式ヲ滿足セシムルモノヲ求メヨウ。

〔13〕 $f(x+z,\ y+u)=f(x,y)f(z,u)$

〔13〕ニ於テ$z=0,\ u=0$トオクコトニヨリ$f(x,y)\equiv 0$ヲ除ケバ$f(0,0)=1$

コノトキ，又〔13〕ニ於テ$z=x,\ u=y$トオクコトニヨリ　$f(2x,\ 2y)=f^2(x,y)$

故ニ$f(x,y)\geqq 0$，又$f(x,y)=0$ナル点(x,y)ハ存在シナイコトハ容易ニ証サレル。即チ$f(x,y)>0$

故ニ$\varphi(x,y)=\log f(x,y)$トオケバ$\varphi(x,y)$ハ$-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$ニ於テ定義サレタ一價實函數デアリ、シカモ$x$及ビ$y$ニツイテ夫々可測トナル。〔13〕ヲ書キカヘルコトニヨリ

$$\varphi(x+z,\ y+u)=\varphi(x,y)+\varphi(z,u)$$

$\varphi(x,y)$ハx及ビyニツイテ夫々可測ナル故，之レヨリ
$\varphi(x,y)=\alpha x+\beta y$（共立社，南雲道夫先生，或ル種ノ函數方程式ニツイテ　2頁参照）

故ニ求ムル解ハ$f(x,y)\equiv 0,\ f(x,y)=e^{\alpha x+\beta y}$トナル。茲ニ$\alpha,\beta$ハ任意ノ實常數ナリトスル。

§14. 次ニ，$f(x,y)$ヲ$-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$ニテ定義サレタ一價實函數デ，$x$及ビ$y$ニツイテ夫々可測ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メヨウ。

〔14〕 $f(x+z,\ y+u)=f(x,y)+f(x,u)+f(z,y)$
$+f(z,u)$

〔14〕ニ於テ $x=0,\ y=0,\ z=0,\ u=0$ トオケバ $f(0,0)=0$

又 $y=0,\ z=0,\ u=0$ トオケバ $f(0,0)=0$ ナル故，
$f(x,0)=0$，同様ニシテ $f(0,y)=0$

〔14〕ニ於テ $u=0$ トオケバ，$f(x,0)=0,\ f(z,0)=0$
ナル故，

$$f(x+z,y)=f(x,y)+f(z,y)$$

$f(x,y)$ ハ x ニツイテ可測ナル故

$$f(x,y)=\alpha(y)x$$

茲ニ $\alpha(y)$ ハ y ニツイテ，一價可測実函數デアル。

〔14〕ニ於テ，$z=0$ トオケバ $f(0,y)=0,\ f(0,u)=0$
ナル故

$$f(x,y+u)=f(x,y)+f(x,u)$$

之ニ $f(x,y)=\alpha(y)x$ ヲ代入スルコトニヨリ，

$$\alpha(y)=cy$$

即チ　$f(x,y)=cxy$

茲ニ c ハ任意ノ實常數ナリトスル。

§15. 次ニ，$f(x,y)$ ヲ $x>0,\ y>0$ デ定義サレタ一價實函數デ，x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ヲ満足サセルモノヲ求メヨウ。

〔15〕 $f(xz,\ yu)=f(x,y)f(z,u)$

$y=1,\ u=1$ トオケバ　　$f(xz,1)=f(x,1)f(z,1)$

$f(x,1)$ ハ x ニツイテ可測ナル故，$f(x,y)\equiv 0$ ヲ除ケバ

$$f(x,1)=x^{\alpha}$$ 茲ニ α ハ任意ノ実常数トリトスル。

同様ニシテ $f(1,y)=y^{\beta}$ 茲ニ，β ハ任意ノ實常数ナリトスル。

[15] ニ於テ，$y=1,\ z=1$ トオケバ

$$f(x,u)=f(x,1)f(u,1)$$

之ヨリ　$f(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$

以上ヲ綜合スレバ，求ムル解ハ $f(x,y)\equiv 0,\ f(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$ トナル。

§16. 次ニ $f(x,y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$ ニテ定義サレタ一価實函数デ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=C$$ （C ハ實常数）ナルトキ，

次ノ函数方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

[16]　$f(x+y,\ x-y)=2f(x,y)$

$g(0,0)=C$ デ，$(x,y)\neq(0,0)$ ナルトキ $g(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ ナル函数 $g(x,y)$ ヲ定義スル。

[16] ヨリ　$2(x^2+y^2)g(x+y,\ x-y)=2(x^2+y^2)g(x,y)$

$(x,y)\neq(0,0)$ ナラバ $g(x+y,\ x-y)=g(x,y)$ ガ

成リ立ツ。$(x, y) = (0, 0)$ナルトキモ，コノ式ガ成リ立ツコトハ明カデアル。コノ式ニ於テ x ノ代リニ $x+y$，y ノ代リニ $x-y$ トオケバ

$$g(2x, 2y) = g(x+y, x-y)$$

故ニ
$$g(2x, 2y) = g(x, y)$$

x ノ代リニ $\frac{x}{2}$，y ノ代リニ $\frac{y}{2}$ トオケバ

$$g(x, y) = g\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

之ヨリ任意ノ自然数 n ニ対シ

$$g(x, y) = g\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right)$$

$n \to \infty$ ナラシムレバ仮定ニヨリ $g\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) \to c$

故ニ
$$g(x, y) \equiv c$$

即チ
$$f(x, y) = c(x^2 + y^2)$$

§17. 次ニ $f(x, y)$ ヲ $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ ニテ定義サレタ一価実函数ナリトシ，x 及ビ y ニツイテ，夫々可測ナルトキ，次ノ函数方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

〔17〕 $f(x+z, y+u) + f(x-z, y-u) = 2f(x, y)$

〔17〕ニ於テ $z = x$, $u = y$ トオケバ

$$f(2x, 2y) = 2f(x, y) - f(0, 0)$$

又，〔17〕ニ於テ，x ノ代リニ $x+z$，y ノ代リニ $y+u$，z ノ

代リ＝$x-z$，uノ代リ＝$y-u$トオケバ

$$f(2x,2y)+f(2z,2u)=2f(x+z,\ y+u)$$

コノ式へ $f(2x,2y)=2f(x,y)-f(0,0)$ ヲ代入スレバ

$$f(x+z,y+u)=f(x,y)+f(z,u)-f(0,0)$$

$f^{*}(x,y)=f(x,y)-f(0,0)$ トオケバ

$$f^{*}(x+z,\ y+u)=f^{*}(x,y)+f^{*}(z,u)$$

之ヨリ　$f^{*}(x,y)=ax+by$

故ニ　$f(x,y)=ax+by+c$　　玆ニ a,b,c ハ任意ノ實常數。

§18. 次ニ，$f(x,y)$ ガ $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ デ定義サレタ連續函數ナルトキ，次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

[18]　$f(xz+yu,\ xu-yz)=f(x,y)f(z,u)$

[18]ニ於テ $y=0$, $u=0$ トオケバ

$$f(xz,0)=f(x,0)f(z,0)$$

$f(x,y)$ ハ連續函數ナル故，$f(x,y)\equiv 0$ ヲ除ケバ

$$f(x,0)=x^{\alpha}$$　玆ニ α ハ 0 又ハ正ノ常數デアル。

[18]ニ於テ $z=x$, $u=y$ トオケバ

$$f(x^2+y^2,\ 0)=f^2(x,y)$$

即チ　$(x^2+y^2)^{\alpha}=f^2(x,y)$

$f(x,y)$ ハ連續函數ナル故ノ之ヨリ $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

ナルカ, $f(x,y)=-(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

[18] ニ適スルモノノミヲ求ムレバ, 結局之ヨリ

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

以上ヲ綜合スレバ $f(x,y)\equiv 0$ 又ハ $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\lambda}$

但シ $\lambda\geqq 0$ ($0^0=1$ ナリト規約ス)。

§19. 次ニ, $f(x,y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ ニテ定義サレタ一價實函數デ, x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナリトスルトキ, 次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ。

(19) $f(x+z,y+u)+f(x-z,y-u)=2f(x,y)+2f(z,u)$

[19] ニ於テ $y=0$, $u=0$ トオケバ

$$f(x+z,0)+f(x-z,0)=2f(x,0)+2f(z,0)$$

$f(x,y)$ ハ x ニツイテハ可測ナル故, 之ヨリ $f(x,0)=ax^2$, 同様ニシテ $f(0,y)=cy^2$. 茲ニ a, c ハ任意ノ實常數デアル。

[19] ニ於テ $u=0$ トオケバ $f(z,0)=az^2$ ナル故

$$f(x+z,y)+f(x-z,y)=2f(x,y)+2az^2$$

コヽデ $P(x,y)=f(x,y)-f(x,0)=f(x,y)-ax^2$

トオキ, 上式ヲカキナホセバ

$$P(x+z,y)+P(x-z,y)=2P(x,y)$$

之ヨリ, 可測ナルコトカラ

$$P(x,y)=\alpha(y)x+\beta(y)$$

茲ニ $\alpha(y)$, $\beta(y)$ ハ y ノ可測函數デアル。

コノ式ニ於テ $x=0$ トオケバ $p(0,y)=\beta(y)$

シカルニ $p(x,y)=f(x,y)-ax^2$ ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$p(0,y)=f(0,y)=cy^2$$

故ニ $\beta(y)=cy^2$

即チ $p(x,y)=\alpha(y)x+cy^2$

オキ換セバ $f(x,y)=ax^2+cy^2+\alpha(y)x$

之ヲ〔19〕ニ代入シテ，$z=0$ トオケバ

$$\alpha(y+u)+\alpha(y-u)=2\alpha(y)+2\alpha(0)$$

之ヨリ $\alpha(y)$ ガ可測ナルコトカラ

$$\alpha(y)=by$$ 茲ニ b ハ任意ノ實常數デアル。

結局，$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ガ求ムル解トナル。茲ニ a, b, c ハ任意ノ實常數デアル。

§20. 次ニ，之ヲ應用シテ次ノ函數方程式ノ解ヲ求メヨウ。

〔20〕 $f(z_1+z_2)+f(z_1-z_2)=2f(z_1)+2f(z_2)$

茲ニ，z_1，z_2 ハ任意ノ複素數デアリ，$f(z)$ ハ實數部 $p(x,y)$，虛數部 $q(x,y)$ ガトモニ x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナル一價實函數ナリトスル。$f(z)=p(x,y)+iq(x,y)$ ヲ〔20〕ヘ代入シテ，實數部虛數部ヲ等シトオケバ（但シ $z_1=x+iy$, $z_2=z+iu$）

$$p(x+z,y+u)+p(x-z,y-u)=2p(x,y)+2p(z,u)$$

$$g(x+z,\ y+u)+g(x-z,\ y-u)=2g(x,y)+2g(z,u)$$

コノ二ツハ丁度〔19〕トナル故，之ヨリ

$$p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2,\ q(x,y)=lx^2+mxy+ny^2$$

但シ a, b, c, l, m, n ハ任意ノ實常數ナリトスル．

$z=x+iy$ トスルトキ

$$f(z)=ax^2+bxy+cy^2+i(lx^2+mxy+ny^2)$$

之ヲマトメテ書ケバ，α, β, γ ヲ任意ノ複素數トスルトキ

$$f(z)=\alpha z^2+\beta z\bar{z}+\gamma \bar{z}^2$$

茲ニ $\bar{z}$ ハ z ノ共軛複素數ナリトスル．

§21. 次ニ，$f(x, y)$，$\varphi(x, y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$ ニテ定義サレタ一價實函數ナリトシ，x 及ビ y ニツイテ，夫々可測ナリトスルトキ，次ノ函數方程式ヲ滿足サセルモノヲ求メテ見ヨウ．

$$〔21〕\quad f(x+z,\ y+u)+f(x-z,\ y-u)$$
$$=2f(x,y)+2\varphi(z,u)$$

之ヨリ $$\varphi(z,u)=\frac{1}{2}\{f(x+z,\ y+u)+f(x-z,\ y-u)-2f(x,y)\}$$

故ニ $$\varphi(x'+z',\ y'+u')+\varphi(x'-z',\ y'-u')$$
$$=\frac{1}{2}\{[f(x+x'+z',\ y+y'+u')+f(x-x'-z',\ y-y'-u')-2f(x,y)]$$
$$+[f(x+x'-z',\ y+y'-u')+f(x-x'+z',\ y-y'+u')-2f(x,y)]\}$$
$$=\frac{1}{2}\{[f(x+x'+z',\ y+y'+u')+f(x+x'-z',\ y+y'-u')]$$
$$+[f(x-x'+z',\ y-y'+u')+f(x-x'-z',\ y-y'-u')]-4f(x,y)\}$$

[21]ニヨリ

$$f(x+x'+z',\ y+y'+u')+f(x+x'-z',\ y+y'-u')$$
$$=2f(x+x',\ y+y')+2\varphi(z',\ u')$$

又 $$f(x-x'+z',\ y-y'+u')+f(x-x'-z',\ y-y'-u')$$
$$=2f(x-x,\ y-y')+2\varphi(z',\ u')$$

ナル故

$$\varphi(x'+z',\ y'+u')+\varphi(x'-z',\ y'-u')$$
$$=f(x+x',\ y+y')+f(x-x',\ y-y')+2\varphi(z',u')-2f(x,\ y)$$

又[21]ニヨリ

$$f(x+x',\ y+y')+f(x-x',\ y-y')$$
$$=2f(x,\ y)+2\varphi(x',\ y')$$

ナル故

$$\varphi(x'+z',\ y'+u')+\varphi(x'-z',\ y'-u')=2\varphi(x',y')+2\varphi(z',u')$$

之ハ[19]トナルカラ之ヨリ a, b, c ヲ任意ノ實常數トスルトキ $$\varphi(x,\ y)=ax^2+bxy+cy^2$$

之ヲ[21]ヘ代入スレバ

$$f(x+z,\ y+u)+f(x-z,\ y-u)$$
$$=2f(x,\ y)+2(az^2+bzu+cu^2)$$

コヽデ $p(x,\ y)=f(x,\ y)-(ax^2+bxy+cy^2)$ トオキ,

上式ヲ $p(x,\ y)$ ニカキナホセバ

$$p(x+z,\ y+u)+p(x-z,\ y-u)=2p(x,\ y)$$

之ハ[17]トナルカラ，之ヨリ

$$p(x,\ y)=lx+my+n$$

即チ $$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+lx+my+n$$
茲ニ a, b, c, l, m, n ハ任意ノ常数デアル.

§22. 次ニ, $f(x,y)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$ ニテ定義サレタ一價實函數ニシテ, 且ツ x 及ビ y ニツイテ夫々可測ナルトキ, 次ノ函數方程式ニ適スルモノヲ求メテ見ヨウ.

$$[22]\quad f(x+z,\ y+u)+f(x+z,\ y-u)$$
$$=2f(x,y)\ f(z,u)$$

上式ニ於テ x ト z, y ト u トヲ入レカヘルコトニヨリ
$$f(x,y)=f(x,-y)$$

又 [22] ニ於テ $x=0$, $y=0$, $z=0$, $u=0$ トオケバ $f(x,y)\equiv 0$ ヲ除キ $f(0,0)=1$ トナル.

[22] ニ於テ $y=0$, $u=0$ トオケバ
$$f(x+z,0)=f(x,0)f(z,0)$$
$f(x,y)$ ハ x ニツキ可測ナル故 $f(x,0)\equiv 0$ (コノトキハ $f(x,y)\equiv 0$ トナルコトハ容易ニ判ル) ヲ除キ, $f(x,0)=e^{\alpha x}$ 茲ニ α ハ任意ノ実常数ナリトスル.

又 [22] ニ於テ $x=0$, $z=0$ トオケバ
$$f(0,y+u)+f(0,y-u)=2f(0,y)f(0,u)$$
$f(x,y)$ ハ y ニツイテモ可測ナル故, 之ヨリ $f(0,y)\equiv 0$ (コノトキハ $f(x,y)\equiv 0$) ヲ除キ, $f(0,y)=\cos\beta y$, $f(0,y)=\cosh\beta y$ ヲ得ル. 茲ニ β ハ任意ノ實常數デア

ル。

[22] ニ於テ $y=0$, $z=0$ トオケバ $f(x,y)\equiv 0$ ヲ除キ

$$f(x,u)+f(x,-u)=2e^{\alpha x}\cos\beta y$$

又ハ $$f(x,u)+f(x,-u)=2e^{\alpha x}\cosh\beta y$$

トコロガ $f(x,u)=f(x,-u)$ ナル 故 $f(x,y)=e^{\alpha x}\cos\beta y$, $f(x,y)=e^{\alpha x}\cosh\beta y$

以上ヲ綜合スレバ求ムル解ハ $f(x,y)\equiv 0$, $f(x,y)=e^{\alpha x}\cos\beta y$, $f(x,y)=e^{\alpha x}\cosh\beta y$ トナル。茲ニ α,β ハ任意ノ實常數ナリトスル。

323. 次ニ, 一ツノ函數不等式ニツイテ論ジヨウ。

$f(x)$ ヲ $-\infty<x<+\infty$ ニテ定義サレタ一價連續函數デ, $f(0)=0$ トシ, 且ツ次ノ函數不等式ヲ滿足セシメルモノトスル。

[23] $$f(x+y)+f(x-y)\leqq 2f(x)+2f(y)$$

(コヽデ $f(x+y)+f(x-y)\leqq 2f(x)$ ナラバ凸函數トナル)

サテ, $-\infty<x<+\infty$ ニ於テ $f(x)\geqq f(1)x^2$ ナルタメノ必要且ツ充分條件ハ任意ノ自然數 n ニ對シ, $f(n)\geqq f(1)n^2$ ナルコトデアリ, 且ツ コノトキ $f(x)=f(1)x^2+g(x)$ トスルナラバ, $g(x)$ ハ次ノ如キ性質ヲモツ。$g(x)\geqq 0$ デ, $g(x)$ ハ偶函數デアリ, 任意ノ整數 m ニ對シ $g(m)=0$ トナル。以下之ヲ證明シヨウ。

先ヅ必要條件ノ方ハ明カデアル。次ニ充分條件トナルコトヲ證明シヨウ。

〔23〕ニ於テ $x=0$ トオケバ $f(0)=0$ ナル故

$$f(-y) \leqq f(y)$$

コノ式デ y ノ代リニ $-y$ トオケバ $$f(-y) \geqq f(y)$$

故ニ $f(x)$ ハ偶函數ナルコトガ判ル。

次ニ〔23〕ヨリ數學的帰納法ニヨリ，任意ノ自然數 n ニ對シ

$$f(n) \leqq f(1)n^2$$

トナルコトヲ證シ得ル。之レト假定 $f(n) \geqq f(1)n^2$ 及ビ偶函數ナルコトカラ，結局任意ノ整數 m ニ對シ

$$f(m) = f(1)m^2$$

トナル。

又〔23〕ヨリ任意ノ整數 m ニ對シ

$$f(mx) \leqq m^2 f(x)$$

n ヲ整數トスルトキ上式ニ於テ $x=\frac{n}{m}$ トオケバ

$$f(n) \leqq m^2 f\left(\frac{n}{m}\right)$$

$f(n)=f(1)n^2$ ナル故

$$f\left(\frac{n}{m}\right) \geqq f(1)\frac{n^2}{m^2}$$

即チ任意ノ有理數 x ニ對シ

$$f(x) \geqq f(1)x^2$$

ガ云ヘタ。之ヨリ連續性カラ任意ノ實數 x ニ對シ

$$f(x) \geqq f(1)x^2$$

定理ノ後半ハ，上述ノ証明ノ中カラ明カデアル。

次ニ實際 $g(x)$ ノヤウナ函數ガアルコトハ $\alpha \geqq 0$ トスルトキ $f(x) = f(1)x^2 + \alpha(1-\cos 2\pi x)$ ガ〔23〕ヲ満足スルコトカラ明カデアラウ。

〔追記〕〔18〕カラ次ノヤウナコトガ云ヘル。複素數 $x+iy$ ヲ定義スルトキ，實數ノ組合セ $\{x, y\}$ ガ四則ノ公準ヲ満足サセタモノトスルトキ，絶對値 $|\{x, y\}|$ ノ定義トシテ〔18〕ヨリ

$$|\{x, y\}\{z, u\}| = |\{x, y\}||\{z, u\}|$$

及ビ $$|\{1, 1\}| = \sqrt{2}$$

ヲトレバヨイコトガ判ル。但シ $|\{x, y\}| = \varphi(x, y)$ ハ連續ナリトスル。