# 1133. 不変測度ノ存在ニ就テ

河田　　敬義（文理大）

$X$ ヲ或ル点集合，$\mathbb{F}$ ヲ $X$ ノ上ノ Borel ノ集合体，$\mu$ ヲ $\mathbb{F}$ デ定義サレタ Lebesgue 式測度トスル。但 $\mu(X)=\infty$ ノトキハ

$$(1)\quad X=\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_n \in \mathbb{F},\ \mu(E_n)<\infty$$

ト表ハサレルモノトスル。

次ニ $X$ ノ上デ定義サレタ一對一変換 $\sigma$ ノ作ル群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレテヰルモノトスル。此ノ時

(2) $E \in \mathbb{F} \longrightarrow \sigma E \in \mathbb{F}$

ヲ假定スル。

$\boxed{\text{定義 1}}$ $\mathbb{F}$ 上デ定義サレタ測度 $m$ ガ *invariantes Mass* デアルトハ

(3) $m(\sigma E) = m(E), \quad \sigma \in \mathfrak{G}, \quad E \in \mathbb{F}$

(4) $m(E) = 0 \longleftrightarrow \mu(E) = 0$

(5) $m(E) < \infty \longleftrightarrow \mu(E) < \infty$

ナルコトヽスル。

此処デハ *invariantes Mass* ノ存在スルタメノ條件ヲ考ヘテミル。特ニ $\mu(X) < \infty$, 且ツ $\mathfrak{G}$ ガ *abelsch* ノ場合ニハ A. Markoff ガ C. R. URSS. 17 (1937), 459—462 デ *Fixpunktsatz* ヲ用ヒテ解決シテヰル。吾々ノ目標ハ

$\boxed{\text{定理 1}}$ *invariantes Mass* $m$ ノ存在スルタメノ必要十分條件ハ

(イ) 任意ニ與ヘラレタ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\delta(\varepsilon) > 0$ ガ定マリ

(6) $\mu(E) < \delta, \quad E \sim E'$ ナラバ $\mu(E') < \varepsilon$

トナルコト。及ビ

(ロ) 任意ニ與ヘラレタ $M$ ニ對シテ $N$ ガ定マリ

(7) $\mu(E) < M, \quad E \sim E'$ ナラバ, $\mu(E') < N$

トナルコトデアル。

此処ニ $E \sim E'$ トハ Zerlegungsgleich ナルコト，即チ

$\boxed{\text{定義}}$ $A \sim B$ トハ $A = \vee_{n=0}^{\infty} A_n$，$B = \vee_{n=0}^{\infty} B_n$，$(A_n, B_n \in \mathbb{F})$，$\mu(A_0) = \mu(B_0) = 0$，$A_i \wedge A_j = 0$ $(i \neq j)$，$B_i \wedge B_j = 0$ $(i \neq j)$ デ且ツ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對シテ適當ニ $\sigma_n \in \mathfrak{G}$

$$A_n = \sigma_n B_n \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

トナルコトヲイフ。$\sim$ ナル関係ハ明カニ "Äquivalenz-relation ヲ満足スル。

先ヅ (イ)，(ロ) が必要デアルコトヲ証明シヨウ。

(1) ト (5) カラ $X = \vee_{n=1}^{\infty} E_n$，$m(E_n) < \infty$ トナルカラ，(4) ニヨッテ Radon-Nikodym ノ定理が使ヘテ

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, m(dx), \quad m(E) = \int_E g(x)\, \mu(dx),$$

$$f(x) \geqq 0, \quad g(x) \geqq 0$$

ト表ヘサレル。コノトキ

$$E_n = \{x;\ f(x) \geqq n\}, \quad F_n = \{x;\ g(x) \geqq n\}$$

トオクト，$n$ ヲ十分大ニスレバ

$$m(E_n) < \infty, \quad \mu(F_n) < \infty$$

トナル。何トナレバ $m(E_n) = \infty$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$ トスレバ $B \in \mathbb{F}$ ヲトッテ

$$m(B) < \infty, \quad m(B \wedge E_n \wedge E_{n+1}^c) = \alpha_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n = \infty$$

ニ出来ルカラ，ソノ B ニ對シテハ

$$\mu(B) = \int_B f(x)\, m(dx) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n = \infty$$

トナリ (5) ノ假定ニ反スル。

故ニ $m(E_{n_0}) < \infty$ トスレバ，$\mu(E_{n_0}) < \infty$ トナリ，又 (5) カラ $m(\bigwedge_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$，從ッテ (4) カラ $0 = \mu(\bigwedge_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim \mu(\bigwedge_{n=\nu}^{\infty} E_n)$ トナルカラ，$n_1$ ヲ十分大キクトレバ $\mu(E_{n_1}) < \varepsilon/2$ ニ出来ル。コヽデ $\delta_1 = \varepsilon/2n_1$ ト取レバ，$m(A) < \delta_1$ ニ対シテ

$$\mu(A) \leqq \mu(E_{n_1}) + \mu(A \cap E_{n_1}^c)$$

$$< \varepsilon/2 + n_1\, \varepsilon/2n_1 = \varepsilon$$

トナル。同様ニ $\delta_1$ ニ對シテ $\delta$ ヲ十分小サクトレバ $\mu(A) < \delta$ ナラバ $m(A) < \delta_1$ ニナル。

サテ $m$ ハ invariant デアルカラ $E \sim E'$ ナラバ $m(E) = m(E')$ トナルカラ，$\mu(E) < \delta$ トスレバ，先ヅ $m(E) < \delta_1$ 從ッテ $m(E') < \delta_1$ トナリ，$\mu(E') < \varepsilon$ ヲ得ル。

(7) ノ必要ナルコトモ同様デアル。

サテ次ニ (イ)(ロ) ノ十分ナコトヲ証明スルノデアルガ，初メニ $\mathfrak{G}$ ガ ergodisch ノ場合ヲ考ヘル。

$\boxed{\text{定義 3}}$ $\mathfrak{G}$ ガ ergodisch デアルトハ，任意ノ $E, F \in \mathbb{F}$, $\mu(E) > 0$, $\mu(F) > 0$ ニ對シテ，適當ニ $\sigma \in \mathfrak{G}$ ヲトルト

$$\mu(E \wedge \sigma F) > 0$$

ナラシメ得ルコトヲイフ。コレハ（$\mu$－測度 0 ヲ除イテ）$\mathfrak{G}$-invariant ナ $E \in \mathbb{F}$ ハ $\mu(E) = 0$ 又ハ $\mu(X - E) = 0$ ナルコトト同値デアル。

コレカラ直チニ得ラレルコトハ

$\boxed{\text{定理 2}}$ $\mathfrak{G}$ ガ ergodisch ナラバ，$m_1, m_2$ ナルニツノ invariante Masse ノ間ニハ

$$m_1(E) = c \cdot m_2(E), \quad 0 < c < \infty$$

ナル關係ガアル。

（証）(1), (4), (5) ガ Radon-Nikodym ノ定理ガ使ヘテ

$$m_1(E) = \int_E f(x)\, m_2(dx)$$

ト表ハサレル。今 $f(x)$ ガ $m_2$－測度 0（從ッテ $\mu$-Mass 0）以外デ Konst ニナルコトヲ見レバヨイノデアルガ，ソウデナイトスレバ，アル $\alpha < \beta$ ニ對シテ

$$A = \{x;\ f(x) \geqq \beta\}, \quad B = \{x,\ f(x) \leqq \alpha\}$$

ガ，$m_2(A) > 0$, $m_2(B) > 0$ デナケレバナラヌ。從ッテ (4) カラ $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ トナリ，$\mathfrak{G}$ ガ ergodisch ナルコトカラ，アル $C = A \wedge \sigma B$ ニ對シテ $\mu(C) > 0$，即

$m_2(C) > 0$ トナル。

然ルニ $A \supset C$ カラ $m_1(C) \geqq \beta m_2(C)$, 且他方

$\sigma^{-1}C \subset B$ カラ $m_1(\sigma^{-1}C) \leqq \alpha m_2(C)$ トナリ, $\alpha < \beta$,

$m_2(C) > 0$, $m_1(C) = m_1(\sigma^{-1}C)$ ト矛盾スル。（証了）

サテ定理1ノ條件(イ)(ロ)ガ十分デアルコトヲ $\mathfrak{S}$ ガ *ergodisch* ノ場合ニ証明シヨウ。

今 $\mathbb{F}^* = \{A;\ A \in \mathbb{F},\ \mu(A) < \infty\}$ トスル。條件(ロ)カラ $A \in \mathbb{F}^*$, $A \sim B$ ナラバ $B \in \mathbb{F}^*$ トナル。

$\boxed{\text{定義4}}$ $\mathbb{F}^* \ni A, B$, $A \succ B$ トハ $A \supset A^* \sim B$, $\mu(A - A^*) > 0$ ナル $A^*$ ノ存在スルコトヲイフ。コレハ $A \sim B^* \supset B$, $\mu(B^* - B) > 0$ ナル $B^*$ ガアルトイッテモ同ジデアル。

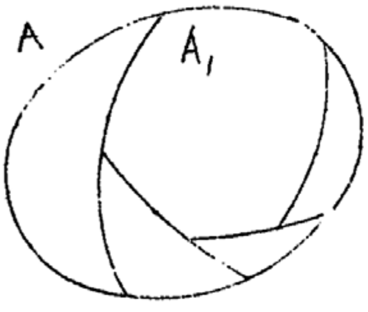
$\succ$ ナル関係ガ *transitive* デアルコトハ明ラカデアル。

$\boxed{\text{補題1}}$ $\mu(A) = 0$ ナルトキ, $A \sim B$ ナルタメノ必要十分條件ハ $\mu(B) = 0$ ナルコトデアル。

（証）定義2ト條件(6)トカラ

$\boxed{\text{補題2}}$ $\mathbb{F}^* \ni A_0$ ハ決シテ $A_0 \succ A_0$ トハナラナイ。

（証）$A_0 \succ A_0$ トスレバ $A_0 \sim A_1 \subset A_0$, $\mu(A - A_1) > 0$ トナル。コノ $A \sim A_1$ ナル對應デ $A_1 \sim A_2 \subset A_1$, $A_2 \sim A_3 \subset A_2$, ...... トナルトスレバ




$A_0 - A_1 \sim A_1 - A_2 \sim A_2 - A_3 \sim \cdots\cdots$,

且ツ $(A_i - A_{i+1}) \frown (A_j - A_{j+1}) = 0 \ (i \neq j)$

カラ $\mu(A) \geqq \sum \mu(A_i - A_{i+1})$。即 $\lim \mu(A_i - A_{i+1}) = 0$

トナル。コレハ (6) ノ假定ニ反スル。((6) ハ對偶ヲトレバ $\mu(E') > \varepsilon$ ナラ $\mu(E) > \delta$)

$\boxed{\text{補題3}}$ $A \sim B,\ C \sim D,\ A \frown C = B \frown D = 0$ ナラバ $A \smile C \sim B \smile D$

$\boxed{\text{補題4}}$ $\mathfrak{G}$ ガ ergodisch ナラバ $\mathfrak{F}^* \ni A, B$ ニ對シテ $A \sim B,\ A \succ B,\ A \prec B$ ノイヅレカ一ツ，然カモ只一ツガ成立スル。

(証) イヅレカ一ツガ成立ツコトハ "Principle of exhaustion" ニヨル。只一ツナルコトハ $A \sim B$, 且ツ $A \succ B$ トスレバ $A \supset A^* \sim B \sim A$, $\mu(A - A^*) > 0$ トナリ，補題2カラ矛盾トナル。又 $A \succ B,\ B \succ A$ トスレバ $A \supset A^* \sim B,\ B \supset B^* \sim A$ トナリ，集合論ニ於ケル Cantor Berdixion ノ定理同様 $A \sim B$ トナリ、前ノ場合ト同ジ矛盾ヲ生ズル。

$\boxed{\text{補題5}}$ $A_1 \sim A_2,\ A_1 \supset B_1,\ A_2 \supset B_2,\ B_1 \sim A_2$ ナラバ，$A_1 - B_1 \sim A_2 - B_2$.

(証) $A_1 - B_1 \succ A_2 - B_2$ トスレバ，$B_1 \sim B_2$ ヲ合セテ $A_1 \succ A_2$ トナリ矛盾ヲ生ズル。

$\boxed{\text{補題6}}$ $A_1 \sim A_2,\ B_1 \sim B_2,\ A_1 \succ B_1$ ナラバ，$A_2 \succ B_2$ トナル。

(証) $A_1 \supset A_1^* \sim B_1 \sim B_2$, $\mu(A_1 - A_1^*) > 0$。故ニ

$A_1 \sim A_2$ ノ対應デ $A_2^* \sim A_1^*$ トナルトスレバ，補題5トノトカラ $A_1 - A_1^* \sim A_2 - A_2^*$，$\mu(A_2 - A_2^*) > 0$ トナリ $A_2 \succ B_2$ トナル。

$\boxed{\text{補題7}}$ $\mathbb{F}^* \ni A$，$A = \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n$，$A_i \cap A_j = 0, (i \neq j)$.
$A_1 \sim A_2 \sim \cdots\cdots$ ナラバ $\mu(A) = 0$.

(証) $\mu(A_1) > \varepsilon > 0$ トスレバ假定(6)カラ $\mu(A_n) > \delta$ トナリ $\mu(A) = \infty$ デナケレバナラヌ。

$\boxed{\text{定義5}}$ $a A_0 = \{A ; A \sim A_0\}$ $(A_0 \in \mathbb{F}^*)$ トスレバ $\mathbb{F}^*$ ハ Klasse ニ分ケラレル。

特ニ $\theta = \{A ; \mu(A) = 0\}$ ハ一ツノ Klasse ヲ作ル。

$\boxed{\text{定義6}}$ $a \ni A$，$b \ni B$，$A \succ B$ ナル $A, B$ ノアルト $a > b$ トスル。コレハ補題6カラキチントシタ意味ガアル。

$\boxed{\text{補題8}}$ $a = b$，$a > b$，$a < b$ ノイヅレカ只一ツガ成立スル。

$\boxed{\text{定義7}}$ $a \ni A$，$b \ni B$，$A \wedge B = 0$ ナル $AB$ ノアルトキ $a + b = a_{A \vee B}$ ト定義スル。補題3カラ $a + b$ ハ代表ノトリ方ニ無関係ニキマル。特ニ $a + \theta = a$.

$\boxed{\text{補題9}}$ (i) $a + b$ ガ存在スレバ，$b + a$ モ存在シテ $a + b = b + a$

(ii) $a + b$，$(a+b)+c$ ガ存在スレバ $b + c$，$a + (b+c)$ モ存在シテ $(a+b)+c = a+(b+c)$

(iii) $a-b$ が存在スレバ $(a-b)+b=a$

(iv) $a+b$ が存在スレバ $(a+b)-b=a$

(v) $a+b$ が存在スレバ $a\leqq a+b$

(vi) $a-b$ が存在スルタメノ條件ハ $a>b$

(vii) $a+x=b$ ガトケルノハ $a\leqq b$ ノトキニ限リ，ソノ解ハ一義ニキマル。

(viii) $a<b$ ハ $b=a+x$, $x>\theta$ ナル $x$ ノ存在スルタメノ必要十分條件デアル。

(ix) $a+c$, $b+c$ が存在スレバ，$a \gtreqless b$ ト $a+c\gtreqless b+c$ トハ同値デアル。

(x) $a\leqq c$, $b\leqq d$ デ，若シ $c+d$ が存在スルナラバ，$a+b$ モ存在シテ $a+b\leqq c+d$

(xi) $a\geqq b$, $a\geqq c$ ナラバ $b\gtreqless c$ ト $a-c\gtreqless b-c$ トハ同値デアル。

(證) イヅレモ定義カラ殆ンド明カデアルが

(viii) $a>b$ ナラ $a+c>b+c$ ハヨイが，逆ニ $a+c>b+c$ ノトキ $a\leqq b$ トスレバ補題5ニ反スル。

(x) $b>c$ ナラバ $a\ni A$, $b\ni B$, $c\ni C$, $A\supset B\supset C$, $\mu(B-C)>0$ ニトレルカラ

$A\supset A-C\supset A-B$, $\mu((A-C)-(A-B))=\mu(B-C)>0$

即チ $a-c>b-c$ トナル。

以下 J. von Neumann, Continuous geometry ノ次元ノ決定ト全ク同ジデアルカラ証明ハ略ス。

$\boxed{定義8}$ $\overbrace{a+\cdots\cdots+a}^{n}$ ノ存在スルトキ $na$ トカ。

$\boxed{補題10}$ $na \leqq b$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナラバ $a=\theta$

$\boxed{補題11}$ $a \neq \theta$, $b$ ニ對シテ $b = na + b_1$, $b_1 < a$ ナル $n$ ガ只一ツキマル。

$(0 \leqq n < \infty)$ コノトキ $n = [b:a]$ トカク。

$\boxed{定義9}$ $a$ ガ minimal トハ $a > b > \theta$ ナル $b$ ノナイコトヲイフ。

$\boxed{補題12}$ $a$ ガ minimal デナケレバ, $a \geqq 2b$, $b \neq \theta$ ナル $b$ ガ存在スル。

以下 minimal ナ元 $a$ ノナイ場合ヲ考ヘル。

$\boxed{定義10}$ $\{a_n\}$ ガ minimal ナ列ガアルトハ $a_n \geqq 2a_{n+1}$ $a_n \neq \theta$ ヲイフ。$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

$\boxed{補題13}$ minimal ナ列 $\{a_n\}$ ニ對シテ

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[b:a_n]}{[a:b_n]}$ ガ存在シテ $\neq 0$, $\neq \infty$ デアル。

コレヲ $(b:a)$ デアラハス。且ツ $[a:a_n] \geqq 1$ ナラバ

$$(8) \quad (b:a) \leqq \frac{[b:b_n]+1}{[a:a_n]} \text{ ヲ満足スル。}$$

$\boxed{定義11}$ minimal ナ列 $\{a_n\}$ ヲ一ツ定メテ

$$m(A) = (a_A : a_0)$$

トオク。

$\boxed{補題14}$ (i) $\infty > m(A) \geqq 0$ デ, $m(A)=0 \longleftrightarrow a_A$

$$= \theta \longleftrightarrow \mu(A) = 0$$

(ii) $m(A \vee B) + m(A \wedge B) = m(A) + m(B)$

(iii) $A \sim B$ ナラバ $m(A) = m(B)$,

$A \succ B$ ナラバ $m(A) > m(B)$

故ニ $A \gtrsim B \longleftrightarrow m(A) \geqq m(B)$ トナル。

$\boxed{\text{補題15}}$ $m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

但シ $A_i \wedge A_j = 0$, $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{F}^*$

以上スベテ Continuous geometry ノトキト同ジ証明ガヤク。最後ニ

$\boxed{\text{定義12}}$ $A \notin \mathbb{F}^*$ ニ對シテ $m(A) = \infty$ トスル。

$\boxed{\text{補題16}}$ $\mathbb{F}^* \ni A$, $A = \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_i \wedge A_j = 0$, $A_n \in \mathbb{F}^*$ ナラバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$$

(証) 今 $B_n = \bigvee_{r=1}^{n} A_r$ トシテ $m(B_n) < N_0$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) トスル。(8) 式ト $m$ ノ定義カラ

$$\frac{1}{N_0} < \frac{1}{m(B_n)} = \frac{1}{(a_{B_n} : a_0)} = (a_0 : a_{B_n}) < \frac{[a_0 : a_r] + 1}{[a_{B_n} : a_r]}$$

但シ $[a_{B_n} : a_r] \geqq 1$ トスル。

シカルニ $[a_{B_1} : a_r] \geqq 1$ ナラ $B_n \supset B_1$ カラ $[a_{B_n} : a_r] \geqq 1$ トナル。

故ニ $[a_{B_n} : a_r] < N_0([a_0 : a_r] + 1) = N_1$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$)

即チ　$a_{B_n} = m_n a_r + b_n$，$m_n \leqq N_1$，$b_n < a_r$

トナル。假定 (7) カラ $\mu(A_r) < M$ $(a_r = a_{A_r})$ トスレバ

$$\mu(B_n) \leqq m_n N + N \leqq N(N_1+1) \quad (n=1,2,\cdots)$$ ト

ナル．ヨッテ

$$\mu(A) = \lim \mu(B_n) \leqq N(N_1+1)$$

トナリ、$A \notin \mathbb{F}^*$ ニ反スル。故ニ $\lim m(B_n) = \infty$ トナル。——

以上デ $m(A)$ ガモトメル *invariantes Mass* ナルコトガ證明セラレタ。

又，*minimal* ナ $a$ ノ存在スルトキモ同樣デアル。

次ニ $\mathfrak{G}$ ガ *ergodisch* デナイ場合ニハ，*irreducible* デナイ *continuous geometry* ノ次元函數ニ關スル岩林氏ノ方法ヲ眞似テ證明サレルガ，ソレハ (II) ニ讓ル。

最後ニ *invariantes Mass* ノ存在スルタメノ簡單ナ十分條件ヲアゲテオク。

$\boxed{\text{定理 3}}$　スベテノ $\sigma \in \mathfrak{G}$，$E \in \mathbb{F}$ ニ對シテ

(9)　$\mu(\sigma E) \leqq c\,\mu(E)$

ナラバ，*invariantes Mass* $m$ ガ存在スル。

(證)　$E \in \mathbb{F}$ ニ對シテ

$$m(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\sigma_i E_i)$$

但シ sup ハ $E=\vee_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_i \wedge E_j = 0\ (i \neq j)$ 及ビ任意ノ $\sigma_i \in \mathfrak{O}\!\mathfrak{f}$ ニ對シテトル。

(9) カラ $\frac{1}{c}\mu(E) \leqq m(E) \leqq c\mu(E)$ トナリ (4), (5) ガ成立ツ。(3) ハ明カ。又 $m$ ガ完全加法的ナコトモ容易ニワカル。

(18. 5. 13)