1130. Bounded Hermitian Operator ノ Spectral Theorem ノ簡單ナ證明

中野 秀五郎

有界 Hermitian Operator ノ Spectral Theorem ノ證明ハ實ニ色々アルガ、其ノ何レモガ難解ナ点ヲ含ンデ居リマス。以下述ベマス證明ハ其ノ点非常ニ簡單カト思ヒマス。此処デハ簡單ノタメ Hermitian Operator ヲ考ヘマスガ，以下ノ方法ハ其ノマゝ直接 Normal Operator ニ適用サレマス。又 Hilbert space $\mathfrak{H}$ ヲ separable トシマスガ non-separable ヘモ擴張出来ルコトハ明カデアリマス。

先ヅ記号ノ説明ヲシマス。$\mathfrak{H}$ デ Hilbert space ヲ表ハシマス。又要素 a_ν ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) カラ

anfgespannen サレタ closed linear manifold ヲ

$$[\, a_\nu : \nu = 1, 2, \cdots\cdots \,]$$

デ表ハシマス。又ソノ射影子ヲ

$$Pr\,[\, a_\nu : \nu = 1, 2, \cdots\cdots \,]$$

デ表ハシマス．又射影子ノ集合 $\mathfrak{P}$ ガ abelian Ring デアルトハ

1) $\mathfrak{P} \ni P, Q \rightarrow PQ = QP, \ \mathfrak{P} \ni PQ, \ \mathfrak{P} \ni P+Q$

2) $\mathfrak{P} \ni P \rightarrow \mathfrak{P} \ni I - P$

3) $\mathfrak{P} \ni P_1 \geqq P_2 \geqq \cdots\cdots \longrightarrow \lim_{\nu\to\infty} P_\nu \in \mathfrak{P}$

ヲ意味シマス。又 H デ有界 Hermitian Operator ヲ表ハシ、其 norm ハ $\| H \|$ デ表シマス。

$\boxed{\text{定理 1}}$

(1) $[\, H^\nu f_0, \ \nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots \,] = \mathfrak{G}$

デアルトキハ，H ト交換可能ナ射影子ノ全体ヲ $\mathfrak{P}$ トシマスト $\mathfrak{P}$ ハ abelian Ring デ、然カモ

(2) $[\, P f_0, \ P \in \mathfrak{P} \,] = \mathfrak{G}$

デアリマス。

$\boxed{\text{証明}}$ H カラ作ラレル Polynomial ヲ P(H) デ表ハシマス。Q_1, Q_2 ヲ H ト commutative ナ射影子トシマス。假定 (1) ニヨリ

$$\lim_{\nu\to\infty} P_\nu'(H) f_0 = Q_1 f_0, \quad \lim_{\mu\to\infty} P_\mu''(H) f_0 = Q_2 f_0$$

デアルヤウナ Polynormal P'_ν, P''_ν ガ存在シマス。然ルトキハ $\mu\to\infty$, $\nu\to\infty$ ニ對シ

$$\begin{aligned}(P'_\nu(H)f_0,\ H^nP''_\mu(H)f_0) &\to (Q_1f_0,\ H^nQ_2f_0)\\ \| \qquad\qquad & \\ (P''^{*}_\mu(H)f_0,\ H^nP'_\mu(H)f_0) &\to (Q_2f_0,\ H^nQ_1f_0)\end{aligned}$$

故ニ

$$(Q_2Q_1f_0,\ H^nf_0) = (Q_1Q_2f_0,\ H^nf_0)$$

デアリマス。從ッテ假定(1)カラ $Q_2Q_1 = Q_1Q_2$ ガ得ラレマス。故ニ $\mathfrak{R}$ ハ abelian Ring デアリマス。

次ニ Q ヲ $\mathfrak{R}$ ノスベテト commutative ナ射影子トシタトキハ，$Q\in\mathfrak{R}$ デアルコトヲ證明シマス。任意ノ要素 g ニ対シテ

$$Pr[H^ng;\ n=0,1,\cdots\cdots]\in\mathfrak{R}$$

デアリマスカラ

$$Qg = \lim_{\nu\to\infty} P'_\nu(H)g$$

$$QHg = \lim_{\mu\to\infty} P''_\mu(H)Hg$$

ナル Polynormal $P'_\nu(H)$, $P''_\mu(H)$ ガ存在シマス。

然ルトキハ

$$\begin{aligned}(P'_\nu(H)g,\ P''_\mu(H)Hg) &\to (Qg,\ QHg)\\ \| \qquad\qquad & \\ (P''^{*}_\mu(H)Hg,\ P'^{*}_\nu(H)g) &\to (QHg,\ Qg)\end{aligned}$$

故ニ $(HQg,\ g) = (g,\ HQg)$ ガ得ラレマス。此レカ

ラ HQ ガ Hermitian デアルコトガ容易ニ知ラレマスカラ $HQ=(HQ)^*=QH$ デアリマス。従ッテ $Q\in\mathfrak{R}$

最後ニ $[Pf_0 : P\in\mathfrak{R}]=\mathfrak{H}$ ヲ証明シマス。

$$P_r[Pf_0, P\in\mathfrak{R}]=Q$$

トシマスト

$$PQ=QPQ=QP \qquad (P\in\mathfrak{R})$$

トナリマスカラ $Q\in\mathfrak{R}$ デアリマス。然カモ $Qf_0=f_0$ デアリマスカラ

$$(I-Q)f_0=0 \qquad 従ッテ \quad (I-Q)H^n f_0=0$$

故ニ仮定(1)ニヨリ $I=Q$ デアリマス。

此ノ定理ニアルヤウニ $\mathfrak{R}$ ト commutative ナ射影子ヲ含ム abelian Ring $\mathfrak{R}$ ヲ einfach ト云ヒマス。

$\boxed{定理 2}$ $\mathfrak{R}$ ヲ einfach ナ abelian Ring. H ガ $\mathfrak{R}$ ノスベテノ射影子ト Commutative トシマスト

$$(HP_1 f, f)\geqq 0, \quad (HP_2 f, f)\leqq 0 \qquad (f\in\mathfrak{H})$$

$$P_1+P_2=I, \quad P_1P_2=0, \quad P_1, P_2\in\mathfrak{R}$$

ナル P_1, P_2 ガ存在シマス。

$\boxed{証明}$ $\mathfrak{R}$ ガ einfach デスカラ定理1ノ証明ノ様ニシテ

$$(2) \qquad [Pf_0 : P\in\mathfrak{R}]=\mathfrak{H}$$

ナル f_0 ガ存在スルコトガ証明出来マス。

$$S = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots\cdots + \alpha_n P_n$$

$$P_\mu P_\nu = 0, \quad P_\mu \in \mathfrak{M} \quad (\mu = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ノ形ノ Hermitian S ヲ $\mathfrak{M}$ デノスペクトル形ト云フコトトシマス。又 S ノ各項ノ中デ，$\alpha_\nu \geqq 0$ ノ項ノミノ和ヲ S^+，$\alpha_\nu \leqq 0$ ノ項ノミノ和ヲ S^- ト表ハスコトトシマス。(2) ニヨリ

$$(3) \quad Hf_0 = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu f_0$$

ナルスペクトル形 S_ν ガ存在シマス。然カモ S_ν ノ係数 α_ν ハ real デ

$$|\alpha_\nu| \leqq 2 ||| H |||$$

ナラシメ得ルコトハ

$$\| Hf_0 - Sf_0 \|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \| (HP_\nu - \alpha_\nu P_\nu) f_0 \|^2$$

$\alpha_\nu \geqq 2 ||| H |||$ トスレバ

$$\begin{aligned} \| (HP_\nu - \alpha_\nu P_\nu) f_0 \| &\geqq 2 ||| H ||| \, \| P_\nu f_0 \| - \| HP_\nu f_0 \| \\ &\geqq \| HP_\nu f_0 \| \end{aligned}$$

ヨリ明ラカデアリマス。従ッテ $S_\nu^+ f_0$ ハ有界デスカラ S_ν^+ カラ適当ニ部分列ヲトッタモノヲ S_ν^+ トスレバ

$$(4) \quad W\text{-}\lim_{\nu \to \infty} S_\nu^+ f_0 = f_1$$

デアル様ナ f_1 ガ存在シマス。又 (3) ヨリ

$$HSf_0 = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu S f_0$$

然カモ $|||S_\nu|||$ ガ有界デスカラ，(2)ニヨリ

(5) $$\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = H$$

デアリマス。

(4) ト (5) カラ $P \in \mathfrak{P}$ ニ對シテ

$$\lim_{\nu\to\infty}(S_\nu S_\nu^+ f_0, Pf_0) = \lim_{\nu\to\infty}(S_\nu^+ f_0, S_\nu P f_0)$$

$$=(f_1, HPf_0) = (Hf_1, Pf_0)$$

然ルニ，明カニ

$$(S_\nu S_\nu^+ f_0, Pf_0) = (S_\nu S_\nu^+ P f_0, Pf_0) \geqq 0$$

デアリマスカラ

$$(Hf_\nu, Pf_0) \geqq 0 \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

従ッテ，又

$$(Hf_1, PS_\nu^+ f_0) \geqq 0$$

故ニ $$(Hf_1, Pf_1) \geqq 0 \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

デアリマス。今

$$P_1 = \Pr[Pf_1 : P \in \mathfrak{P}]$$

トシマスト，明カニ $P_1 \in \mathfrak{P}$ デ然カモ

$$g = \alpha_1 P_1 f_1 + \cdots\cdots + \alpha_\nu P_\nu f_\nu$$

ニ對シテハ

$$(Hg, g) = \sum \alpha_\nu^2 (Hf_1, P_\nu f_1) \geqq 0$$

デアリマスカラ

$$(HP_1 f, f) = (HP_1 f, P_1 f) \geqq 0 \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

デアリマス。又

$$P_2 = I - P_1$$

トシマスト，$P_2 f_1 = f_1 - P_1 f_1 = 0$ デアリマスカラ (4) ヨリ

$$\mathrm{w}\text{-}\lim S_\nu^+ P_2 f_0 = P_2 f_1 = 0$$

デアリマス。従ッテ $P \in \mathfrak{R}$ ニ對シ

$$(S_\nu P_2 f_0, P f_0) \leqq (S_\nu^+ P_2 f_0, P f_0) \to 0$$

デアリマスカラ，(5) ニヨリ

$$(H P_2 f_0, P f_0) \leqq 0 \qquad (P \in \mathfrak{R})$$

故ニ (2) ニヨリ P_1 ノ場合ト同様ニシテ

$$(H P_2 f, f) \leqq 0 \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

ガ得ラレマス。

$\boxed{\text{定理 3}}$ $\mathfrak{H}$ デノ有界ノ Hermitian H ニ對シ H ト commutative ナ射影子カラナル einfach ナ abelian ring $\mathfrak{R}$ ガ存在シ $\mathfrak{R}$ ノスペクトル形 S_ν ヲ適當ニトレバ

$$\lim_{\nu \to \infty} ||| H - S_\nu ||| = 0$$

トナル。

$\boxed{\text{証明}}$ $f_1 \neq 0$ ニ對シ

$$\mathfrak{H}_1 = [H^\nu f_1 : \nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots]$$

トシ，$\mathfrak{H}_1$ ト直立シテ，f_2 モ 0 ナル要素ニ對シ

$$\mathfrak{H}_2 = [H^\nu f_2 : \nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots]$$

トシ，以下同様ニシ，高々可附番個ノ

$$\mathfrak{H}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ガ得ラレマス。此ノ $\mathfrak{H}_\nu$ ハ互ニ直交シテ

$$[\mathfrak{H}_\nu : \nu = 1, 2, \cdots\cdots] = \mathfrak{H}$$

デアリマス。$\mathfrak{H}_\nu$ ハ定理1ノ假定(1)ヲ滿足シマスカラ，$\mathfrak{R}$ ガ得ラレマス。但シ $\mathfrak{R}_\nu$ デハ I ノカハリニ $P_{\mathfrak{H}}[\mathfrak{H}_\nu]$ ガアリマス。$\mathfrak{R}_\nu$ 全体カラ作ラレル abelian ring ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ

$$f_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{f_\nu}{\| f_\nu \|}$$

ニ對シ

$$[P f_0 : P \in \mathfrak{R}] = \mathfrak{H}$$

デアリマスカラ，$\mathfrak{R}$ ハ einfach デアリマス。

然カモ $\mathfrak{R}$ ハ明カニ H ト commutative デスカラ定理2ニヨリ

$$(HP_1 f, f) \geqq 0, \quad (HP_2 f, f) \leqq 0$$

$$P_1 + P_2 = I, \quad P_1 P_2 = 0, \quad P_1, P_2 \in \mathfrak{H}$$

ナル P_1，P_2 ガ存在シマス。然ルトキハ

$$\gamma = |\!|\!| H |\!|\!|$$

ニ對シテ

$$(\gamma P_1 f, f) \geqq (H P_1 f, f) \geqq 0$$

$$-(\gamma P_2 f, f) \leqq (H P_2 f, f) \leqq 0$$

デスカラ

$$\left(\frac{1}{2}\gamma P_1 f, f\right) \geqq \left(\left(H-\frac{1}{2}\gamma P_1\right)P_1 f, f\right) \geqq -\left(\frac{1}{2}\gamma P_1 f, f\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\gamma P_2 f, f\right) \geqq \left(\left(H+\frac{1}{2}\gamma P_2\right)P_2 f, f\right) \geqq -\left(\frac{1}{2}\gamma P_2 f, f\right)$$

故ニ

$$\frac{1}{2}\gamma(f, f) \geqq \left(\left(H-\frac{1}{2}\gamma P_1+\frac{1}{2}\gamma P_2\right)f, f\right) \geqq -\frac{1}{2}\gamma(f, f)$$

従ッテ

$$\left\| H-\frac{1}{2}\gamma P_1+\frac{1}{2}\gamma P_2 \right\| \leqq \frac{1}{2}\gamma$$

トナリマスカラ，以下同様ニシテ S_ν ガ得ラレマス。

$\boxed{\text{追 記}}$　定理２デハ定理１ノ仮定デ証明シ、定理３デ，$\mathfrak{G}_\nu$ ノ各ニツイテ $P_1^{(\nu)}, P_2^{(\nu)}$ ヲ求メテ $P_1=\sum P_1^{(\nu)}$，$P_2=\sum P_2^{(\nu)}$ トシタ方ガ簡単ニナルヤウデス。又上ノ証明デハ有限次元ノ場合ヲ同時ニ含ンデ居リマス。而カモ有限次元ノ場合ハ定理１カラ直チニ得ラレルワケデス。即チ定理３ノヤウニ $\mathfrak{G}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{G}_n$ トシ，$\mathfrak{G}_1$ デ $\mathfrak{R}$ ヲ考ヘコスト定理１ノ (2) ニヨリ $\mathfrak{G}_1$ ハ有限次元デアリマスカラ

$$P_1+P_2+\cdots\cdots+P_\kappa=I,\quad P_\mu P_\nu=0\ (\mu\neq\nu),\quad P_\nu\in\mathfrak{R}$$

$$[P_1 f_0, \cdots\cdots, P_\kappa f_0]=\mathfrak{G}_1$$

ナル $P_1, \cdots\cdots, P_\kappa$ ガ存在シマス。従ッテ κ ハ $\mathfrak{G}_1$ ノ次元ニ等シク

$$g_\nu=\frac{P_\nu f_0}{\|P_\nu f_0\|}$$

トシテ $\mathcal{G}$ ノ正規直交系 $g_1, g_2, \cdots\cdots$ ガ得ラレ，
然カモ

$$P_\nu H = H P_\nu$$

デスカラ

$$H g_\nu = \lambda_\nu g_\nu$$

トナリ、Hガ diagonal form トナリマシタ。

—— 18. 6. 11. ——