1126. L. Pontrjagin ノ双對定理ノ證明ニツイテ

吉田　耕作（名大）

先キノ談話デ"函數環"ノ考ヘヲ使ッテ compact 群ニ關スル濱中氏双對定理ヲ幾分簡單ニ證明シタ。局所 compact ナ可換群 G ノ双對定理（L. Pontrjagin）モ"のるむ環"ノ考ヘト Plancherel 定理ヲ使ッテ D. Raikov ガ證明シテ居ル。Raikov ハ Haar 測度ニ關スル Weil－小平ノ定理ヲ知ラナイラシク[1] ソノタメニ幾ラカソノ證明ガ冗長?ナヤウニ思ハレルノデ以下

---

(1) モットモ結局 Raikov ハ，可換群ノ場合ノ Weil－小平ノ定理ノ證明ヲシテ居ルコトニナル訳デセウガ。

ニ少シク簡単化サレタ証明ヲ述ベテミタイ。

G ノ連続指標ノ群ヲ G^*, G^* ノ位相ハ G^* ノ単位ノ近傍トシテ, G ノ任意ノ compact 集合 C ト $\varepsilon>0$ トニ対シテ得ラレル $\{g^* \mid |g^*(g)-1|<\varepsilon,\ g\in C\}$ ヲトルコトニヨリ定義スル (Pontrjagin). G^* ノ連続指標ノ群 G^{**} ニ同ジヤウニシテ位相ニ入レル。代数的ニ $G\subseteq G^{**}$ ハ明カデアルガ双対定理ノ証明ノ核心ハ位相的ニ $G\subseteq G^{**}$ 即チ G ノ位相ガ G^{**} ノ位相カラ induce サレタ部分集合トシテノ位相ト一致スルコトデアル。

偖テ $x(g)\in L^2(G)$ トスレバ Weil－小平ノ定理デ G ノ単位ノ近傍ハ

$$(1)\quad \left\{ h \,\middle|\, \varepsilon > \int_G |x(g+h)-x(g)|^2 dg \right\}$$

ノ如キモノカラ生成サレル。所ガ Plancherel ノ定理ニヨリ変換

$L^2(G)\ni Z\to Z^*\in L^2(G^*)$, $L^2(G^*)\ni Z^*\to Z^{**}\in L^2(G^{**})$

ハイヅレモうにたりーデアル:

$$Z^*(g^*)=\int_G Z(g)g^*(g)\,dg,\quad g^*\in G^*$$

$$Z^{**}(g^{**})=\int_{G^*} Z^*(g^*)g^{**}(g^*)\,dg^*,\quad g^{**}\in G^{**}$$

故ニ

$$\int_G |x(g+h)-x(g)|^2 dg$$

$$=\int_{G^*} |g^*(-h)x^*(g^*)-x^*(g^*)|^2 dg^*$$

$$=\int_{G^{**}} |x^{**}(g^{**}-h)-x^{**}(g^{**})|^2 dg^{**}$$

ヨッテ G ノ単位ノ近傍(1)ハ，Weil－小平定理ニヨル，G^{**} ノ単位ノ近傍

$$\left\{h^{**} \,\middle|\, \varepsilon > \int_{G^{**}} |x^{**}(g^{**}-h^{**})-x^{**}(g^{**})|^2 dg^{**}\right\}$$

ノGヘノ射影トシテ得ラレル。逆ニ G^{**} ノ単位ノ近傍ノGヘノ射影がGノ単位ノ近傍ナルコト即チ embedding $G \xrightarrow[in]{} G^{**}$ ノ連續性ハ位相ノ定義カラ容易ニ云ヘルコトデアルカラ証明了デアル。

(注意) 實ハコノ變換ノ部分モ Plancherel 定理ヲ使ヘバ初メノ部分ト同ジヤウニ証明デキルノデアル。即チ任意ノ $w^{**} \in L^2(G^{**})$ ニ対シ変換

$$L^2(G^{**}) \ni w^{**} \longrightarrow w^* \in L^2(G^*)$$

$$L^2(G^*) \ni w^* \longrightarrow w \in L^2(G)$$

が双方共ニうにたりーナコトヲ使ヘバヨイ

$$w^*(g^*) = \int_{G^{**}} w^{**}(g^{**})\, g^{**}(g^*)\, dg^{**}$$

$$w(g) = \int_{G^*} w^*(g^*)\, g^*(g)\, dg^*$$