1123. 連續幾何學ニ就テ

岩村　聯（東大）

定義ハ後デ下スコトニシテ，目標ヲ先ニ述ベマス。ソレハ可約ナ連續幾何ニ一般次元函數ヲ導入スルコトト，可約ナ連續幾何ヲ既約ナモノノ直和ノ中ニ束同型ニ embed スルコトデス。J. von Neumann ニヨレバ，既約ナ連續幾何ニハ實數値次元函數ガ導入サレマス（Lectures on Continuous Geometries, part I……以後 C.G.I. ト略記）

又可約ナモノニ一般次元函數ヲ導入スルタメノ殆ド完全ナ準備ガ C.G.III デ整ヘラレテヰマスガ，如何ナル理由ニヨルモノガ，最後ノ結果迄ハ示サレテ居リマセン。C.G.III

ノ諸結果ト I. Halperin ガ與ヘタ補題（Trans. Amer. vol. 44）ヲ使ヘバ，後述ノ様ニ比較的簡単ニ目標ニ到達シマス。既約ナモノノ直和ノ中ニ embed スルコトモコレニ伴ッテ実現サレマスガ，單ニ束同型ニ embed サレルトイフダケデ，一般ノ join ト meet ニツイテハ如何ナッテヰルカ一寸ワカリマセン。此ノ点ガ何トカナラナイモノデセウカ。

§ 1

L ハ最大元 1，最小元 0 ヲ有スル complemented, modular ナ束トスル。L ノ元ヲ $a, b, \cdots\cdots, x, y, \cdots\cdots$ デ表ハシ，半順序ヲ $\leqq$ join ヲ $a+b$, meet ヲ ab デ表ハス。任意個数（有限ト限ラズ）ノ元ノ join, meet ヲ（存在スレバ）Σ, Π デ表ハス。$a+b=a+x=b+x$, $ab=ax=bx$ ナル x ガ存在スルコトヲ $a \sim b$ ト記ス（必ズシモ transitive デハナイ）。$a \precsim c$, $a \succsim c$ ハ夫々 $a \sim b \leqq c$, $a \sim b \geqq c$ ナル b ガ存在スルコトヲ表ハス。

$a \prec c$, $a \succ c$ ハ夫々 $\precsim c$, $a \succsim c$ デアッテ $a \sim c$ デナイコトヲ表ハス。

G ハ半順序加法群（半順序ガ加法デ保存サレル）トスル。f ヲ L ノ上デ定義サレテ G ノ中ノ値ヲ取ル函數トスル。常ニ $f(a) \geqq 0$ ナラバ，f ハ positive デアルト言

ヲ。恒等的ニ $f(a+b)+f(ab)=f(a)+f(b)$ ガ成立スレバ，f ハ（一般）modular functional デアルト云フ。$ab=0$ ナルスベテノ a, b ニ対シテ $f(a+b)=f(a)+f(b)$ ガ成立スレバ，f ハ modular functional デアル。

f ガ sharply positive modular functional デアレバ，$a \sim b$ 又ハ $a \prec b$ 又ハ $a \succ b$ ニ従ッテ夫々 $f(a)=f(b)$ 又ハ $f(a)<f(b)$ 又ハ $f(a)>f(b)$ トナル。positive modular functional デアルト言フダケナラバ，＜及ビ＞ハ $\leqq$ 及ビ $\geqq$ デ置キ換ヘシレネバナラナイ。

f ガ positive modular functional デ，$f(a) \leqq f(b)$ 又ハ $f(a) \geqq f(b)$ ニ従ッテ必ズ $a \precsim b$ 又ハ $a \succsim b$ ナルトキニ，f ハ（一般）次元函數デアルト云フ。此ノトキ f ハ sharply positive ニナル。f ガ實數値次元函數ナラバ，任意ノ a, b ニツイテ $a \lessgtr b$ トナルコトデアル。スベテノ a, b ノ間ニ $a \lessgtr b$ ガ成立スレバ，L 上ノ sharply positive modular functional ハ（若シ存在スレバ）次元函數デアル。

以下シバラク C. G. III カラ差當ッテ必要ナ定數ト結果トヲ（少シ変形シテ）抜キ出シテ見ル。而シ §2 以後ニ於テモ C. G. III ノ其他ノ結果モ引用サレル。

完全束 L ガ complemented, modular デ，連續

性ノ公理

I) $a_0 \geqq a_1 \geqq \cdots \geqq a_\xi \geqq a_{\xi+1} \geqq \cdots$ (ξ, φ ハ超限順序數) ナラバ $b + \prod_{\xi<\varphi} a_\xi = \prod_{\xi<\varphi}(b + a_\xi)$

II) I) ノ双對

ヲ滿タストキ, L ハ連續幾何デアルト云フ。以後 L ハ常ニ連續幾何ヲ表ハス。補充ガ unique デアルヤウナ元ノ全体ヲ L ノ center ト言ヒ, Z デ表ハス。Z ノ元ヲ e, e_0, e^* 等ト記ス。

Z ハ Boolean algebra デアル。Z ノ任意ノ部分集合 $\{e\}$ ニツイテ $\sum e, \prod e \in Z$ デアル; 從ッテ Z ハ complete デアル。次ノ條件ハ互ニ同値デアル。

i) $e \in Z$ ナラバ $e=0$ 又ハ $e=1$

ii) スベテノ a, b ニツイテ $a \underset{\sim}{\gtrless} b$.

此等ノ條件ガ成立スレバ L ハ既約, シカラザレバ L ハ可約デアルト言フ。

L ノ部分集合 $\{a_\gamma\}$ (γ ハ parameter $\in \Gamma$) ガ獨立デアルト言フノハ, Γ ノ任意ノ互ニ素ナ部分集合 Γ_1, Γ_2 ニツイテ $(\sum a_{\gamma_1})(\sum a_{\gamma_2}) = 0$ ($\gamma_i \in \Gamma_i$) トナルコトデアル。コレヲ $\{a_\gamma\}\perp$ ト記ス。後ニ表ハレルノハ Z ノ部分集合ノ獨立ナ場合ダケデアル。$\{e_1, \cdots\cdots, e_n\}\perp$ ノ必要十分條件ハ $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$ デアル。

$\sim$ ハ推移的 (transitive), 從ッテ一ツノ對等關係 (equivalence relation) デアル。L ハ $\sim$ デ類

$A_a = (x;\ x \sim a)$ ニ分ケテ類ノ全体ヲ $\mathcal{L} = (A_x;\ x \in L)$ トスル。$\mathcal{L}$ ノ元ヲ A, B, X, Y 等デ表ハス。特ニ $\Theta = A_0$, $I = A_1$ トスル（何レモ唯一ツノ L ノ元カラ成ル類），$a \lesssim b$ ノトキ $A_a \leqq A_b$, $a \gtrsim b$ ノトキ $A_a \geqq A_b$ ト定メレバ，$\leqq$ ハ $\mathcal{L}$ ノ半順序ヲ與ヘル。$a \leqq c$, $A_a \leqq B \leqq A_c$ ナラバ，$a \leqq b \leqq c$ ナル $b \in B$ ガ存在スル。e, A ガ與ヘラレタトキ $eA = (ex;\ x \in A)$ ト定メル。$eA \in \mathcal{L}$ デアル。

$a \sim b$, $b \sim b'$, $ab = a'b' = 0$ ナラバ $a + b \sim a' + b'$ デアル。

ソコデ $ab = 0$ ノトキ $A_a + A_b = A_{a+b}$ ト定メル。次ノコトハ容易ニ確メラレル; 左辺ガ存在スレバ $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$（右辺ガ存在シテ，此ノ等式ガ成立スルトイフ意味；以下同様）。$A + X = B$ ナル X ノ存在ト $A \leqq B$ トハ同値デ，X ハ存在スレバ A, B デ一意ニ定マル。此ノ X ヲ $B - A$ ト記ス。$A \leqq B \leqq C$, $C - B \leqq C - A$, $B - A \leqq C - A$ ハ互ニ同値デアル。

$\{e_1, \cdots\cdots, e_n\} \perp$ ナラバ任意ノ $A^1, \cdots\cdots, A^n$ ニ對シテ $e_1 A^1 + \cdots\cdots + e_n A^n$ ガ存在シ，特ニ $e_1 A + \cdots\cdots + e_n A = (e_1 + \cdots\cdots + e_n) A$ デアル。

實數ノ zero 0 ニ對シテ $0A = \Theta$ ト定メル。整數 $n \geqq 0$ ニ對シテ nA ガ定マリ且ツ $nA + A$ ガ存在スルトキ，$(n+1)A = nA + A$ ト定メル。$n \geqq m \geqq 0$ ナラバ $nA \geqq mA$, $(n-m)A = nA - mA$. 一辺ガ存在スレバ

$(n+m)A = nA + mA$. mA ガ存在シ，一辺ガ存在スレバ $(nm)A = n(mA)$. ソノ括弧ヲ省イテ nmA ト記ス；他ノ場合ニモ同様ナ記法ニ従フ。nA ガ存在スレバ $enA = neA$. $n \geqq 1$ ノトキ，一辺ガ存在スレバ $n(A+B) = nA + nB$.

$a \prec\!\prec b$ トハ，スベテノ e ニ対シテ $ea \prec eb$ 又ハ $ea = eb = 0$ トナルコトデアル。$A \ll B$ トハ，スベテノ e ニ対シテ $eA < eB$ 又ハ $eA = eB = \theta$ トナルコトデアル。$\succ\!\succ$, $\gg$ モ同様。$A_a \ll A_b$ ト $a \prec\!\prec b$ トハ同様デアル。

e_0 ヲ固定シテ，変換 $a \rightarrow e_0 a$, $A \rightarrow e_0 A$ ヲ考ヘルト，コレハ次ノ演算，関係ニツイテ準同型変換デアル：L ニ於ケル演算 $a+b$, ab, 関係 $\hat{=}$, $\sim$, $\prec$, $\prec\!\prec$, L ノ元ト $\mathcal{L}$ ノ元トノ間ノ関係 $\in$, $\mathcal{L}$ ニ於ケル演算（可能ナ範囲デ）$A+B$. $A-B$, nA, eA, 関係 $\hat{=}$, $\ll$

§ 2

C. G. III, *Theorem* 2.7 ニヨレバ：スベテノ a, b ニ対シテ，

a) $\{e_1, e_2, e_3\} \perp$, b) $e_1 + e_2 + e_3 = 1$,
c) $e_1 a \succ\!\succ e_1 b$, d) $e_2 a \prec\!\prec e_2 b$, e) $e_3 a \sim e_3 b$

ナル e_1, e_2, e_3 ガ存在スル。此レヲ定義ニ従ッテ次ノ様ニ言ヒ直シ，以後 *Theorem* 2.7* トシテ屡々引用スル：ス

ベテノ A, B ニ對シテ

$a)$ $\{e_1, e_2, e_3\}\perp$, $b)$ $e_1+e_2+e_3=1$,

$c)$ $e_1A \gg e_1B$, $d)$ $e_2A \ll e_2B$, $e)$ $e_3A=e_3B$

ナル e_1, e_2, e_3 ガ存在スル。最初ノ應用トシテ

補題1. $\mathcal{L}$ ハ $\leqq$ ニツイテ束ヲナス。ソノ meet ヲ $A\wedge B$, join ヲ $A\vee B$ デ表ハス。nA, nB ガ存在スレバ $nA\vee nB=n(A\vee B)$, $nA\wedge nB=n(A\wedge B)$.

證明. A, B ニ對シテ上記ノ e_1, e_2, e_3 ヲ取ッテ置ク。nA, nB ノ存在ヲ假定スレバ, $a)$ ニヨッテ

$$1)\quad C^n=e_1nA+e_2nB+e_3nA \quad \text{及ビ}$$

$$D^n=e_1nB+e_2nA+e_3nB$$

ガ存在シテ

$$2)\quad C^n=ne_1A+ne_2B+ne_3A=nC',$$

$$D^n=ne_1B+ne_2A+ne_3B=nD'.$$

$a), b)$ ニヨッテ, 任意ノ X ニ對シテ

$$3)\quad X=e_1X+e_2X+e_3X$$

トナル。特ニ $X\geqq nA, nB$ トスレバ 1), 3) カラ $X\geqq C^n$ ヲ得. 又 $nA, nB\geqq X$ トスレバ $D^n\geqq X$ トナル。c), d), e) カラ

$c)'$ $ne_1A\geqq ne_1B$, $d)$ $ne_2A\leqq ne_2B$,

$e)'$ $ne_3A=ne_3B$

ヲ得ルカラ, $C^n\geqq nA, nB$, 又 $nA, nB\geqq D^n$ トナル。

從ッテ $C^n=nA\vee nB$, $D^n=nA\wedge nB$.

$n=1$ ノトキヲ考ヘテ見レバ，$C'=A\vee B$, $D'=A\wedge B$ ハ無條件ニ存在スルカラ，$\mathcal{L}$ ハ束デアル。再ビ nA, nB ノ存在ヲ假定スレバ，2) ニヨッテ

$$nA\vee nB=C^n=nC'=n(A\vee B),$$
$$nA\wedge nB=D^n=nD^n=n(A\wedge B).$$

（以上）

變換 $A\to e_0A$ ガ $\mathcal{L}$ ノ束準同型変換デアルコトハ明カデアラウ。任意個數（有限ト限ラズ）ノ *meet*, *join* ニツイテモ，若シ存在スレバ，$\bigwedge$ 及ビ $\bigvee$ ナル記号ヲ使フ。次ニ上ノ補題ヲ精密ニスルコトヲ考ヘル。

I. Halperin ニヨレバ：$a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots$, $b\simeq a_n$ $n=1,2,\cdots\cdots$ ナラバ $b\simeq\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ デアル。ソコデ今 $a_n\in A^n$, $\prod_{n=1}^{\infty}a_n\in A$ トシテ見レバ此ノコトカラ $A=\bigwedge_{n=1}^{\infty}A^n$ ヲ得ル。次ニ一般ニ $A^1\geqq A^2\geqq\cdots\cdots$ ナル列ヲ取ッテ考ヘレバ，$a_n\in A^n$, $a_n\geqq a_{n+1}$ ナル列 $\{a_n\}$ ヲ取ルコトガ出來ルカラ，$\bigwedge_{n=1}^{\infty}A^n$ ガ存在スルコトニナル。$\mathcal{L}$ ハ束デアルカラ，此ノ事實ニヨッテ，全然一般ノ可附番列 $A^1, A^2,\cdots\cdots$ ニ對シテモ $\bigwedge_{n=1}^{\infty}A^n$ ガ存在スルコトニナル。此等ノコトノ双對モ亦成立スルコトハ明カデアル。以上ヲ纏メテ：

補題2. 束 $\mathcal{L}$ ハ可附番ノ意味デ完全束デアル。$a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots$, $a_n\in A^n$ $n=1,2,\cdots\cdots$ ナラバ $\prod a_n\in\bigwedge A_1^n$ デアル。$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots$, $a_n\in A^n$ $n=1,2,\cdots\cdots$ ナラバ

$\sum a_n$ ニ VA ガ ジアル。

$a \sim b$ ナラバ $e(a)=e(b)$ デアル。ソコデ $a \in A$ ノトキ $e(A)=e(a)$ ト定メル。

スベテノ a ニ對シテ次ノ樣ナ b, c, d ガ存在スルトキ、L ハ ∞ 型デアルト云フ。

$$a \geqq b+c = c+d = d+b, \quad bc = cd = db = 0,$$
$$e(a) = e(b).$$

補題3. L ヲ ∞ 型トスル。スベテノ a ニ對シテ、$a = b^*+c^*$, $b^* \sim c^*$, $b^*c^*=0$ ナル b^*, c^* ガ存在スル。從ッテスベテノ A ニ對シテ $\frac{1}{2}A$ ガ存在スル。

證明. L ノ元ノ組 (x, y, z) ノ間ニ半順序ヲ定義スル: $x \leqq x'$, $y \leqq y'$, $z \leqq z'$ デアルコトヲ $(x, y, z) \leqq (x', y', z')$ トスル。T ヲ

$$a \geqq x+y = y+z = z+x, \quad xy = yz = zx = 0$$

ナル組 (x, y, z) ノ全体トスル。T ニコノ半順序ノ意味デノ極大元ガ存在スルコトヲ示サウ。ソレニハ $S = \{(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ ヲ T ノ任意ノ全順序部分集合トシテ、T ノ中ニ S ノ上界ガ少クモ一ツアルコトヲ示セバ十分デアル。(Zorn ノ補題). $x = \sum_\gamma x_\gamma$, $y = \sum_\gamma y_\gamma$, $z = \sum_\gamma z_\gamma$. $\gamma \in \Gamma$ トスレバ $a \geqq x+y = y+z = z+x$ ハ明白. 所ガ $(x_\gamma; \gamma \in \Gamma)$ 等ハ L ノ全順序部分集合デアルカラ, L ノ連續性ノ公理カラ容易ニ $xy = \sum x_\gamma y_\gamma$ 等ヲ得ル。從ッテ $xy = yz = zx = 0$ トナル。此ノ (x, y, z) ハ S ノ一ツノ上界 $\in T$ デアル。

Tノ極大元ノ一ツヲ (b^*, c^*, d^*) トシ
$a^* = b^* + c^* \; (= c^* + d^* = d^* + b^*)$ ト置ケバ, $a \geqq a^*$. 今
$a = a^* + a'$, $a^* a' = 0$ ナル a' ヲ取ッテ

$$a' \geqq b' + c' = c' + d' = d' + b',$$

$$b'c' = c'd' = d'b' = 0, \quad e(a') = e(b')$$

トスル。 $b = b^* + b'$, $c = c^* + c'$, $d = d^* + d'$ トスレバ容易ニ

$$a \geqq b + c = c + d = d + b, \quad bc = cd = db = 0$$

ヲ得ル。(註) ソレ故 $(b^*, c^*, d^*) \leqq (b, c, d) \in T$. 所ガ (b^*, c^*, d^*) ハTノ極大元デアッタカラ此ノ不等式ハ實ハ等式トナル。特ニ $b^* = b$.

故ニ $\quad b' = bb' = b^* b' \leqq a^* a' = 0$.

從ッテ $\quad a' \leqq e(a') = e(b') = 0$ トナル。

從ッテ $\quad a = a^* = b^* + c^*$ ニシテ $b^* \sim c^*$, $b^* c^* = 0$

(以上)

(註) $bc = 0$ ダケ証明シテ置ク.

$bc = (b^* + b')(c^* + c') \leqq (a^* + b')(a^* + c') = (a^* + a')(a^* + b')(a^* + c')$,

modularity ニヨッテ, $= a^* + a'(a^* + b')(a^* + c')$.

所デ $a'(a^* + b')(a^* + c') = a'(a^* + b')\,a'(a^* + c')$,

modularity ニヨッテ, $= (a'a^* + b')(a'a^* + c')$.

$a'a^* = 0$, $b'c' = 0$ デアルカラ結局 $bc \leqq a^* + 0 = a^*$.

全ク同様ニ $\quad bc \leqq a'$

從ッテ $\quad bc \leqq a^* a' = 0$

サテ n ヲ自然數トシテ，1) $\frac{1}{n}$ 丁ガ存在シ，
2) $A \ll \frac{1}{n}$ 丁ナラバ $A=\theta$ デアルトキニ，L ハ n 型デアルト云フ。C. G. III, *Theorem* 3.2 及ビ 3.6 ヲ纏メテ吾々ノ言葉デ言ヘバ：L ハ n 型 $(n=1, 2, \cdots\cdots, \infty)$ ノ連續幾何ノ直和 $\sum \oplus L^n$ $1 \leqq n \leqq \infty$ ニ分解サレル。此処デ連續幾何ノ直和ハ次ノ様ニ定義サレル。

λ ヲ或ル *parameter* トシ，λ ノ各々ノ値ニ連續幾何 L^λ ガ對應シテ居ルトスル。λ ニ L^λ ノ元 a^λ ヲ對應サセル一價函數ヲ $\sum \oplus a^\lambda$ ト記シ，斯様ナ $\sum \oplus a^\lambda$ ノ全体ヲ $\sum \oplus L^\lambda$ ト記ス。$\sum \oplus L^\lambda$ ニ普通ノ半順序ヲ導入スル；$\sum \oplus a^\lambda \leqq \sum \oplus b^\lambda$ ハスベテノ λ ニツイテ $a^\lambda \leqq b^\lambda$ デアルコトヲ定メル。$\sum \oplus L^\lambda$ ハ此ノ半順序ニツイテ連續幾何ヲナス。ソレヲ L^λ ノ直和ト云フ。

ソコデ問題ハ各々ノ L^n ニ次元函數ヲ導入スルコトト，L^n ヲ更ニ既約ナモノノ直和ノ中ニ *embed* スルコトトニナル。ソレ故以後 n 型 $(1 \leqq n \leqq \infty)$ ノ L ダケヲ考ヘレバ宜シイ。

§ 4

∞ 型ノ連續幾何ニ次元函數ヲ導入スルダケナラバ，問題ハ次ノ様ニ簡單ニ解ケテシマフ。L ハ ∞ 型デアルトスル。

スベテノ A ニ對シテ $\frac{1}{2}A$ ガ存在スル。任意ノ A, B ニ對

シテ $\frac{1}{2}A \leqq \frac{1}{2}T \leqq T - \frac{1}{2}B$ デアルカラ，$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ ガ存存スル。$A+B$ ガ存在スレバ $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A+B)$ デアル。$\frac{1}{2}(A \vee B) = \frac{1}{2}A \vee \frac{1}{2}B$，$\frac{1}{2}(A \wedge B) = \frac{1}{2}A \wedge \frac{1}{2}B$ デアル，従ッテ $A \leqq B$ ナラバ $\frac{1}{2}A \leqq \frac{1}{2}B$ デアル。

n ヲ自然數トシ，スベテノ $k \geqq n$ ニ對シテ $A^k \in \mathcal{L}$ ガ對應シテ $A^k = 2A^{k+1}$ 即チ $A^{k+1} = \frac{1}{2}A^k$ デアルトスル。斯樣ナ對應 $k \to A^k$ $k \geqq n$ ヲ $\{A^k\}_n$ 又ハ簡單ニ $\{A\}$ ト記ス．$\{A^k\}_n \equiv \{B^k\}_m$ ハ，$A^l = B^l$ ナル $l \geqq n, m$ ガ存在スルコトト定義スル。$\{A^k\}_n \leqq \{B^k\}_m$ ハ，$A^l \leqq B^l$ ナル $l \geqq n, m$ ガ存在スルコトト定メル。

$\{A^k\}_n \equiv \{B^k\}_m$ ナラバスベテノ $j \geqq n, m$ ニ就イテ $A^j = B^j$，又 $\{A^k\}_n \leqq \{B^k\}_m$ ナラバスベテノ $j \geqq n, m$ ニツイテ $A^j \leqq B^j$ デアル。従ッテ $\equiv$ ハ對等關係デアル。$\{A\}, \{B\}, \cdots\cdots$ ヲ $\equiv$ デ類ニ分ケテ，類ヲ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\cdots\cdots$，其ノ全体ヲ $\mathfrak{R}$ トスル。

$\{A\} \in \mathfrak{a}$, $\{B\} \in \mathfrak{b}$, $\{A\} \leqq \{B\}$ ナラバ $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ トスル。$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ ナラバ任意ノ代表 $\{A^*\} \in \mathfrak{a}$, $\{B^*\} \in \mathfrak{b}$ ニ對シテモ $\{A^*\} \leqq \{B^*\}$ ガ成立スル．従ッテ $\leqq$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ半順序ヲ與ヘル。

次ニ演算 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ヲ定義スル．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ノ代表ヲ任意ニ取ッテ，夫々 $\{A^k\}_n$ 及ビ $\{B^k\}_m$ トスル。$C^i = A^i + B^i$ ハスベテノ $i \geqq l = 1 + \max(n, m)$ ニ對シテ存在シ，

$C^i = 2C^{i+1}$ デアル. 此ノ $\{C^i\}_l$ ヲ含ム類 $\mathfrak{c}$ ハ $\{A^k\}_n$, $\{B^h\}_m$ ノ選ビ方ニ關係ナク, $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トデ一意ニ定マル. $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ トスル。

次ノ事實ハ殆ンド明白デアラウ, $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$ ナラバ $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c} + \mathfrak{b}$. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$ ナラバ, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ナル $\mathfrak{b}$ ガ存在シテ, $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トデ一意ニ定マル。アル自然數 m ニツイテ $2^m \mathfrak{a} \leqq 2^m \mathfrak{c}$ ナラバ, $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ デアル. 從ッテ $\mathfrak{L}$ ハ或ル半順序加法群 $\mathfrak{G}$ ニ迄擴張サレル。

$A = \{A^k\}_1 \in \mathfrak{a}$, $A' = A$ ナル $\mathfrak{a}$ ヲ對應サセテ $\mathfrak{a} = \varphi(A)$ トスル。

i) φ ハ one-to-one ナ對應デアッテ, $A \leqq B$ ト $\varphi(A) \leqq \varphi(B)$ トハ同値デアル.

又 ii) $A+B$ ガ存在スレバ $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ デアル。特ニ iii) $\theta = \varphi(\theta)$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ zero デアル。

所ガ一般ニ, L ヲ ∞ 型ニ限ラズ, 半順序加法群 $\mathfrak{G}$ ト, L カラ $\mathfrak{G}$ ノ一部ヘノ寫像 φ トガアッテ, 上記 i), ii), iii) ガ成立スレバ, 次ノ様ニシテ L ニ(一般)次元函數ガ導入サレル. $a \in A$ ノトキ $f(a) = \varphi(A)$ ト定義スル.

$f(0) = \varphi(\Theta) = \theta$. 又 $ab = 0$ ナラバ $f(a+b) = f(a) + f(b)$, 從ッテ f ハ modular functional デアル. $a \in A$, $b \in B$ トスルト $a \precsim b$ ト $A \leqq B$ ハ同値, $A \leqq B$ ト $\varphi(A) \leqq \varphi(B)$ トハ同値, 從ッテ $a \precsim b$ ト $f(a) \leqq f(b)$

トガ同値ニナル。ソレ故 f ハ次元函数デアル。

§5

$e_1, e_2 \in \mathfrak{p}$ ナラバ $e_1 e_2 \in \mathfrak{p}$ トナル様ナ，Z ノ部分集合 $\mathfrak{p}$ ヲ一ツ固定シテ考ヘル。

$eA = eB$ ナル $e \in \mathfrak{p}$ ガ存在スルコトヲ $A = B(\mathfrak{p})$ ト記ス。$=(\mathfrak{p})$ ハ $\mathfrak{L}$ ニ於ケル對等関係デアル。$\mathfrak{L}$ ヲ演算 $+, -, \vee, \wedge$ ヲ有スル代數系ト考ヘレバ，$=(\mathfrak{p})$ ハソノ合同(congruence)ヲ與ヘル。即チ例ヘバ A^1+B^1 ト A^2+B^2 トガ存在シ $A^1 = A^2(\mathfrak{p})$, $B^1 = B^2(\mathfrak{p})$ ナラバ，$A^1+B^1 = A^2+B^2(\mathfrak{p})$ トナル。

ソコデ $\mathfrak{L}$ ヲ $=(\mathfrak{p})$ デ類 $(A), (B), \cdots\cdots; (A) = (X; X = A(\mathfrak{p}))$ ニ分チ，類ノ全体ヲ $(\mathfrak{L}) = ((A); A \in \mathfrak{L})$ トシテ，$(\mathfrak{L})$ ニ剰餘系トシテノ演算 $+, -, \vee, \wedge$ ヲ導入スル。即チ例ヘバ $(A)+(B)$ ガ存在スルトイフノハ，$A'+B'$ ガ存在スルヤウナ $A' \in (A)$ 及ビ $B' \in (B)$ ガアルコトトシ，此ノトキ $(A)+(B) = (A'+B')$ ト定義スル。$(\mathfrak{L})$ ハ演算ニツイテ $\mathfrak{L}$ ニ準同型デアル。從ッテ $\vee, \wedge$ ニツイテ束公理ヲ満タス。$\vee, \wedge$ カラ半順序 $\leqq$ ヲ $(\mathfrak{L})$ ニ導入スレバ，$eA \leqq eB$ ナル $e \in \mathfrak{p}$ ガ存在スルコトト $(A) \leqq (B)$ トガ同値ニナル。又 $e \in \mathfrak{p}$ ナラバ $(eA) = (A)$ デアル。從ッテ $\mathfrak{L}$ ノ諸性質ガ $(\mathfrak{L})$ ニ飜譯サレル。ソレヲ幾ツカ擧ゲテ見ヨウ。

$(A)+(B)$ ガ存在スレバ $(A) \leqq (A)+(B) = (B)+(A)$.
一方，IV ガ存在スレバ $(A)+((B)+(C)) = ((A)+(B))+(C)$.
$(B) = (A)+(C)$ ナル (C) ノ存在ト，$(B)-(A)$ ノ存在ト
$(A) \leqq (B)$ トハ互ニ同値デ，コノトキ (C) ハ (A) ト (B) ト
デ一意ニ定マリ，$(C) = (B)-(A)$ デアル。$(B)+(C)$ ガ
存在シ $(A) \leqq (B)$ ナラバ $(A)+(C) \leqq (B)+(C)$.
$(A) \leqq (B) \leqq (C)$, $(C)-(B) \leqq (C)-(A)$, $(B)-(A) \leqq (C)-(A)$
ハ互ニ同値デアル。

L ニ於テモ同様ニ，$ea = eb$ ナル $e \in \mathfrak{p}$ ガ存在スルコトヲ $a = b\,(\mathfrak{p})$ ト定義スル．$=(\mathfrak{p})$ ハ L ノ束合同ヲ與ヘル。$(a) = (x;\ x = a\,(\mathfrak{p}))$, $(L) = ((a),\ a \in L)$ トシテ L ノ剰餘系 (L) ヲ作レバ，コレハ L ニ準同型ナ束トナリ，従ッテ complemented, modular デアル，$\leqq$, $\sim$, $\lesssim$, $\gtrsim$ ノ一ツヲ ρ デ表ハスコトニスレバ，$(a)\,\rho\,(b)$ ハ $ea\,\rho\,eb$ ナル $e \in \mathfrak{p}$ ノ存在ト同値ニナル。（コレハ一々試ミテ見レバ直チニワカル）。又 $e \in \mathfrak{p}$ ナラバ $(ea) = (a)$ デアル。此レカラ $\sim$ ノ推移性ガ出ル。$\sim$ ハ (L) ニ於ケル對等關係トナルカラ，此レデ (L) ヲ類 $(A)^*$, $(B)^*$, …… ニ分ケテ，類ノ全体ヲ $(\mathfrak{L})^*$ トスル。斯様ナ記号ヲ用ヰルノハ，$(\mathfrak{L})$ ト $(\mathfrak{L})^*$ トノ間ニ次ノ様ナ關係ガ成立スルカラデアル。

$ea \in eA$ ナル e ガ存在スルコトヲ $a \in A\,(\mathfrak{p})$ ト記ス．$a \in A$ ナラバ $a \in A\,(\mathfrak{p})$ デアル。前記ノ ρ ヲ $\sim$ トシテ見

レバ，$a \in A(\mathfrak{p})$ ニトキ，$(a) \sim (b)$ ト $b \in A(\mathfrak{p})$ トガ同値デアルコトガワカル。從ッテ $\frown$ ニヨル (L) ノ類別 $(\mathfrak{L})^*$ ハ $(A)^* = \{(x);\ x \in A(\mathfrak{p})\}$ ノ全体 $(A \in \mathfrak{L})$ トシテ與ヘラレル。ソレ故類 $(A)^*$ ハ以後或ル $A \in \mathfrak{L}$ デ與ヘラレタモノト考ヘル。

次ノ條件 1) ト 2)，2) ト 3)，3) ト 4) ガ互ニ同値デアルコトハ明瞭： 1) $(A)^* = (B)^*$， 2) $(A)^*$ ト $(B)^*$ トガ共通元ヲ有スル 3) eA ト eB トガ共通元ヲ有スル様ナ $e \in \mathfrak{p}$ ガ存在スル， 4) $A = B(\mathfrak{p})$ 此ノ 1) ト 4) トヲ比較シテ見レバ；$(\mathfrak{L})$ ト $(\mathfrak{L})^*$ トハ $(A) \longleftrightarrow (A)^*$ デ one-to-one ニ對應スル。ソコデ演算ト半順序ノ定義サレタ $(\mathfrak{L})$ ヲ，(L) ノ $\frown$ ニヨル類別 $(\mathfrak{L})^*$ ト考ヘル。從ッテ $(a) \in (A)$ ナル関係ガ意味ヲ有スル。$(a) \in (A)$ ノ必要十分ナ條件ハ，$a \in A(\mathfrak{p})$，即チ $ea \in eA$ ナル $e \in \mathfrak{p}$ ガ存在スルコトデアル。ソシテ $(A)+(B)$ ノ存在ハ，$(a) \in (A)$，$(b) \in (B)$，$(a)(b) = (0)$ ナル (a)，(b) ノ存在ト同値デアル。此ノトキ $(a)+(b) \in (A)+(B)$ トナル。又 $(a) \in (A)$，$(b) \in (B)$，$(A) \leqq (C) \leqq (B)$ ナラバ，$(a) \leqq (c) \leqq (b)$ ナル $(c) \in (B)$ ガ存在スル事モ容易ニ知ラレル。

以上ハ $\mathfrak{L}$，L ト其ノ剰餘系 $(\mathfrak{L})$，(L) ノ関係トシテ殆ド trivial ナ事許リデアッタ。次ノ補題ハ証明ヲ要スルカモ知レナイ：

補題4. $(a_m) \geqq (a_{m+1})$，$A^m \geqq A^{m+1}$，$(a_m) \in (A^m)$

$m=1,2,\cdots\cdots$ ナラバ，$a^*_m \geqq a^*_{m+1}$，$a^*_m \in A^m$，$(a^*_m)=(a_m)$ ナル $a^*_1, a^*_2, \cdots\cdots$ ガ存在スル。

証明．1・α) $a^* \in A \geqq B$，1・β) $(a^*) \geqq (b) \in (B)$ デアルトキニ，2・α) $a^* \geqq b^*$，2・β) $b^* \in B$，2・γ) $(b^*) = (b)$

ナル b^* ガ存在スルコトヲ示サウ。

1β) ニヨッテ，$e_1 a^* \geqq e_1 b$，$e_2 b \in e_2 B$ ナル $e_1, e_2 \in \mathfrak{p}$ ガ存在スル。$e = e_1 e_2$ トスレバ $e \in \mathfrak{p}$ デアル。ソシテ

$$e a^* \geqq e b,\quad eb \in eB.$$

e ノ補充ヲ e' トスル：$e+e'=1$，$ee'=0$．1，β) カラ $e'a^* \in e'A \geqq e'B$ ヲ得ル。従ッテ $e'a^* \geqq b' \in e'B$ ナル b' ガ存在スル。

$b^* = eb + b'$ トスレバ，$e+e'=1$ ニヨッテ

$$a^* = (e+e')a^* = ea^* + e'a^* \geqq eb + b' = b^* \cdots\cdots 2\cdot\alpha)$$

又 $ebb' \leqq ebe' = 0$ カラ

$$b^* \in eB + e'B = (e+e')B = B \cdots\cdots 2\cdot\beta)$$

又 $eb^* = eeb + eb' = eb + eb'$，$eb' \leqq ee' = 0$

カラ

$$eb^* = eb' \qquad \text{ソシテ}\ e \in \mathfrak{p} \cdots\cdots 2\cdot\gamma)$$

サテ $a^*_1, a^*_2, \cdots\cdots$ ハ次ノ様ニ作ラレル。上記 1．α)，1．β) ニ於テ $a^* = 1$，$A = \dagger$，$B = A'$，$(b) = (a_1)$ ト

シテ $a_1^* = b^*$ トスレバ $a_1^* \in A'$, $(a_1^*) = (a_1)$. a_m^* 迄定マッタトキ, 1.α), 1.β) デ $a^* = a_m^*$, $A = A^m$, $B = A^{m+1}$, $(b) = (a_{m+1})$ トシテ $a_{m+1}^* = b^*$ トスレバ $a_m^* \geqq a_{m+1}^*$, $a_{m+1}^* \in A^m$, $(a_{m+1}^*) = (a_{m+1})$.

—— (以上) ——

サテ上記ノヤウナ $\mathfrak{p}$ ($e_1, e_2 \in \mathfrak{p}$ ナラバ $e_1 e_2 \in \mathfrak{p}$) ガ更ニ, $Z \ni e_1 > e_2 \in \mathfrak{p}$ ナラバ $e_1 \in \mathfrak{p}$ デアルト云フ條件ヲ満タストキ, $\mathfrak{p}$ ハ双對 ideal (Z ノ) ト言ハレル。双對 ideal $\mathfrak{p}$ ガ $\neq Z$ デ, $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}$ ナル双對 ideal ガ必ズ $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ 又ハ $\mathfrak{q} = Z$ デアルトキ, $\mathfrak{p}$ ハ極大双對 ideal デアルト言ハレル。以後 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ 等ハ Z ノ極大双對 ideal ヲ表ハスコトニスル。(A), (a) 等ガ何レノ $\mathfrak{p}$ デ構成サレタモノデアルカラ明示スル必要ガアルトキニハ $\mathfrak{p}(A)$, $\mathfrak{p}(a)$ 等ト記ス。

任意ノ e ニ對シテ $\mathfrak{M}(e) = (\mathfrak{p};\, e \in \mathfrak{p})$ トスレバ, Boole 代數 Z ハ集合束 $(\mathfrak{M}(e);\, e \in Z)$ デ同型ニ表現サレル。ソレ故 e ト $\mathfrak{M}(e)$ トヲ區別シナイコトニスル。従ッテ $e \in \mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{p} \in e$ トハ同ジ内容ヲ有スル。$1 = \mathfrak{M}(1)$ ハ Z ノ極大双對 ideal 全体ノ集合, $0 = \mathfrak{M}(0)$ ハ空集合デアル. $e \in \mathfrak{p}$ ナル e ヲ $\mathfrak{p}$ ノ近傍ト定義スレバ 1 即チ $\mathfrak{M}(1)$ ハ bicompact Hausdorff space トナル。

補題 5. A, B ガ與ヘラレタトスル。スベテノ $\mathfrak{p}$ ニツイテ $\mathfrak{p}(A) \leqq \mathfrak{p}(B)$ ナラバ, $A \leqq B$ デアル。

證明. 任意ノ$\mathfrak{p}$ニ對シテ, $eA \leqq eB$ ナル $e \in \mathfrak{p}$ ガ存在スル。スベテノ $\mathfrak{p}$ ニ就イテ斯様ナ e ヲ對應サセレバ, $1 = \mathfrak{m}(1)$ ノ open covering ヲ得ル。ソノ中カラ finite covering $\{e_1^*, \cdots\cdots, e_n^*\}$ ヲ取出ス: $e_1^* + \cdots\cdots + e_n^* = 1$, $e_i^* A \leqq e_i^* B$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$. e_i^* ノ補元ヲ e_i' トシテ, $e_1 = e_1^*$, $e_j = e_1' \cdots\cdots e_{j-1}' e_j^*$ トスレバ,

$$\{e_1, \cdots\cdots, e_n\} \perp, \quad e_1 + \cdots\cdots + e_n = 1,$$

$$e_i A \leqq e_i B \qquad i = 1, \cdots\cdots, n$$

從ッテ

$$A = e_1 A + \cdots\cdots + e_n A \leqq e_1 B + \cdots\cdots + e_n B = B.$$

——(以上)——

補題6. 各々ノ $(\mathfrak{L}) = \mathfrak{p}(\mathfrak{L})$ ハ全順序集合デアル。

證明. 任意ノ(A), (B) ヲ取ル. Theorem $2 \cdot 9^*$ ニ於ケル e_1, e_2, e_3 ヲ取レバ $e_1 + e_2 + e_3 = 1$, $e_1 A \geqq e_1 B$, $e_2 A \leqq e_2 B$, $e_3 A = e_3 A$. 何レカノ $e_i \in \mathfrak{p}$ デアルガ, e_1 又ハ e_2 又ハ $e_3 \in \mathfrak{p}$ ニ從ッテ $\mathfrak{p}(A) \geqq \mathfrak{p}(B)$ 又ハ $\mathfrak{p}(A) \leqq \mathfrak{p}(B)$ 又ハ $\mathfrak{p}(A) = \mathfrak{p}(B)$ トナル。

——(以上)——

§6

以後 $\mathfrak{L}$ ハ n 型 ($n < \infty$) 又ハ ∞ 型トシ, 少クモ2個ノ元ヲ有スルモノトスル。從ッテ常ニ $(+) > (\theta)$ デアル. n 型ノ $\mathfrak{L}$ ヲ考ヘルトキハ $\Delta = \Delta_n = (k \cdot n^{-1};\ k = 0, 1, \cdots\cdots, n)$ トスル, ∞ 型ノ $\mathfrak{L}$ ヲ考ヘルトキハ $\Delta = \Delta_\infty = (k \cdot 2^{-m};$

$k=0,1,\cdots\cdots,2^m,\ m=1,2,\cdots\cdots$）トスル。$L$ガ$n$型ノトキハ$n^{-1}$十ガ存在シテ$(n^{-1}$十$)>(\theta)$, ∞型ノトキハ2^{-m}十$(m=1,2,\cdots\cdots)$ガ存在シテ$(2^{-m}$十$)>(\theta)$デアル。従ッテ何レノ場合ニモ，$r\in\Delta$ナラr十ガ存在シテ，$s>r$, $s\in\Delta$ナラ$(s$十$)>(r$十$)$デアル。以後$r, s, \cdots\cdots$ハΔノ元トスル。

補題 7. Lガn型ノトキニハ，任意ノ(A)ニ對シテ，$(A)=(r$十$)$ナルrガ存在スル。Lガn型デモ∞型デモ$\sup\Delta^0=\inf\Delta'$ガ成立スル；但シ$\Delta^0=(r;(r$十$)\leqq(A))$, $\Delta'=(s;(A)\leqq(r$十$))$.

證明. $\sup\Delta^0\leqq\inf\Delta'$ハ明白. 又$(k)$ガ全順序集合デアルカラ，$\Delta$ハ$\Delta^0$ト$\Delta'$トデ盡サレル。$\Delta_\infty$ハ區間$[0,1]$デ稠密デアルカラ，$\infty$型ノ$L$ニツイテハ$\sup\Delta^0=\inf\Delta'$トナル。$L$ガ$n$型ナラバ$r=\max\Delta^0$, $s=\min\Delta'$ガ存在シテ$r=s$又ハ$r+n^{-1}=s$トナル. 従ッテ$r+n^{-1}=s$トシテ矛盾ヲ出セバ證明ハ終ル。

$r+n^{-1}=s$ノ意味ハ，$(r$十$)<(A)<(s$十$)$, $(s$十$)=(r$十$+n^{-1}$十$)=(r$十$)+(n^{-1}$十$)$

$(B)=(A)-(r$十$)$トオケバ$(\theta)<(B)<(n^{-1}$十$)$トナル. Theorem 2.7*ニヨッテ，次ノヤウナe_1, e_2, e_3ガ存在スル：

$$e_1+e_2+e_3=1,\quad e_1B\gg e_1n^{-1}十,\quad e_2B\ll e_2n^{-1}十,$$
$$e_3B=e_3n^{-1}十.$$

何レカノ e_i ガ $\in \mathfrak{p}$ デアル。 $e_1 \in \mathfrak{p}$ トスレバ $(B) \geqq (n^{-1}\dagger)$ トナッテ $(B) < (n^{-1}\dagger)$ ニ反スル。 $e_2 B \ll n^{-1}\dagger$ デアルカラ $e_2 B = \theta$。所ガ $(\theta) < (B)$ デアルカラ, $e_2 \notin \mathfrak{p}$. $e_3 \in \mathfrak{p}$ トスレバ $(B) = (n^{-1}\dagger)$, ソレハ $(B) < (n^{-1}\dagger)$ ニ反スル。

——(以 上)——

$[(A)] = \sup \Delta^{\circ} = \inf \Delta'$ ト定メル。$\mathfrak{p}$ ヲ明示スルトキ $[\mathfrak{p}(A)]$ ト記ス。定義カラ $0 \leqq [(A)] \leqq 1$, 又 $(A) \leqq (B)$ ナラバ $[(A)] \leqq [(B)]$, 又 $[(A)] < [(B)]$ ナラ $(A) < (B)$ デアル。$(A) \leqq (B)$ ノトキ即チ $(B)-(A)$ ガ存在スルトキ $[(B)] - [(A)] = [(B)-(A)]$ デアルコトガ容易ニワカル。ソレ故 $(A)+(B)$ ガ存在スレバ $[(A)+(B)] = [(A)] + [(B)]$。トナル。

特ニ L ガ n 型ノトキハ $(A) \leqq (B)$ ト $[(A)] \leqq [(B)]$ トガ同値ニナル。従ッテコノ場合ニハ §4 末尾ノ所論ト同様ニ, (L) ニ次元函数ガ導入サレテ, 其ノ取ル値ハ $0, n^{-1}, 2 \cdot n^{-1}, \ldots\ldots, 1$ デアル。ソレ故 (L) ハ n 次元ノ連續幾何デ既約デアル。シカシ此レカラ述ベルヤウナ $\overline{(L)}$ ノ構成ニハ, n 型デモ ∞ 型デモ同ジコトデアル。

変数 $\mathfrak{p}$ ノ實數値函數 $f(\mathfrak{p})$, $g(\mathfrak{p})$ ニ普通ノ半順序 $\leqq$ ト束演算 $f \vee g$, $f \wedge g$ ヲ導入スル: 例ヘバ $(f \vee g)(\mathfrak{p}) = \max\{f(\mathfrak{p}), g(\mathfrak{p})\}$. サテ (L) ハ全順序集合デアルカラ, $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$ ハ (A) 又ハ (B) ニ等シイ。

従ッテ $[(A \vee B)] = [(A) \vee (B)] = \max\{[(A)], [(B)]\}$.
ソレ故 $[p(A)]$ ヲ, A デ定マル p ノ函數ト見テ $f_A(p)$ ト記セバ $f_{A \vee B} = f_A \cup f_B$ トナル。同ジ理由デ $f_{A \wedge B} = f_A \cap f_B$ トナル。$f_A(p)$ ハ定義ニヨッテ, $\overline{\Delta}$ ノ値ヲ取ル; 但シ $\overline{\Delta}$ ハ實數空間ニ於ケル Δ ノ closure デアッテ $\overline{\Delta}_n = \Delta_n$, $\overline{\Delta}_\infty = [0, 1]$ デアル。

$r \leqq f_A(p) \leqq s$ 即チ $r \leqq [p(A)] \leqq s$ ハ, $er\dagger \leqq eA \leqq es\dagger$ ナル p ノ近傍 e が存在スルコトト同値デアル。此ノ近傍 e ニ屬スル任意ノ q ニツイテモ $r \leqq f_A(q) \leqq s$ トナルワケデアル。定義ニヨリ,

$$f_A(p) = \sup(r;\ r \leqq f_A(p)) = \inf(s;\ f_A(p) \leqq s)$$

デアルカラ:

補題 8. f_A ハ p ノ連續函數デアル。

コヽデ C. G. III, *Theorem* 2.13 ヲ引用スル: スベテノ自然數 m ニ對シテ mA が存在スルノハ, $A = \theta$ ノトキニ限ル。

補題 9. $f_A = f_B$ ナラバ $A = B$.

證明. A, B ノ代リニ $A \vee B$, $A \wedge B$ ヲ考ヘレバヨイカラ, $A \geqq B$ ト假定スル。$C = A - B$ トシテ $C = \theta$ ヲ示セバ足リル。$(C) = (A) - (B)$ デアルカラ $f_C = 0$ (常數 zero). 従ッテ, $r > 0$ トスレバ, 任意ノ p ニツイテ $p(C) < p(r\dagger)$. 補題 6 カラ $C < r\dagger$ トナル。L が ∞ 型ノトキ $r = 2^{-m}$ トシテ見レバ, スベテノ自然數 m ニ

對シテ $2^m C$ ガ存在スルコトニナル; 從ッテ固ヨリ mC ガ存在スル。ソレ故 $C=\theta$. L ガ n 型ノトキハ $r=n^{-1}$ トシテ見レバ, $C \ll r\dagger$ ガ證明サレレバヨイコトガワカル。任意ノ $e \neq 0$ ニ對シテ, $e \in \mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ガ存在スル。$C \leqq r\dagger$, $\mathfrak{p}(C) < \mathfrak{p}(r\dagger)$ デアルカラ, $eC < er\dagger \leqq r\dagger$. $e \neq 0$ ハ任意デアッタカラ, $C \ll r\dagger$.

——(以上)——

ソレ故 $A \longrightarrow f_A$ ハ one-to-one ナ對應デアル。ソレハ束演算ヲ保存スル。從ッテ束同型對應デアル。又 $A+B$ ガ存在スレバ $f_{A+B}(\mathfrak{p}) = [(A)+(B)] = [(A)] + [(B)] = f_A(\mathfrak{p}) + f_B(\mathfrak{p})$. 實數値連續函數(変數 $\mathfrak{p}$)ノ束群ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ $\mathcal{L}$ ニ於ケル加法ニ $\mathfrak{G}$ ニ於ケル加法ガ對應シ ($f_{A+B} = f_A + f_B$), θ ニ對應スル f_θ ハ明カニ $\mathfrak{G}$ ノ zero: $f_\theta = 0$ デアルカラ, §4 ノ所論ガ, L ニ次元函數ガ導入サレル。即チ $a \in A$ ノトキ $f_a = f_A$ トスル, 或ハ f_a ヲ L カラ $\mathfrak{G}$ ヘノ寫像ト見テ $D(a) = f_a$ トスレバ D ガソノ次元函數デアル。

定理1. *bicompact space* $\mathfrak{M}(1)$ 上デ定義サレタ實數値函數 $f(\mathfrak{p})$ ノ作ル束群ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ $\mathcal{L}$ ハ $A \longleftrightarrow f_A$ ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ中ニ演算 $+$, $-$ (可能ナ範囲デ) 及ビ束演算ニツイテ同型ニ表現サレル。

$a \in A$ ノトキ $D(a) = f_A$ トスレバ D ハ L 上ノ次元函數デアル。$\mathcal{L}$ ニ對應スル $\mathfrak{G}$ ノ部分集合 (從ッテ D ノ値域)

ハ，スベテノ $\mathfrak{p}$ ニツイテ $f(\mathfrak{p})\in\overline{\Delta}$ デアルヤウナ $f\in\mathfrak{g}$ ノ全体デアル。

証明．　最後ノ部分ダケガ問題デアル。即チ連續函數 f ガ常ニ $\overline{\Delta}$ ノ値ヲ取ルトキニ，$f=f_A$ ナル A ヲ求メルコトデアル。

任意ノ $\lambda\in\overline{\Delta}$ ト任意ノ正數 ε トニ對シテ，$\lambda-\varepsilon<r\leqq\lambda\leqq s<\lambda+\varepsilon$ ナル r, s ガ存在スルコトニ注意スル。f ヲ上記ノ様ナ函數トスル。ε ヲ或ル正數トスル。

任意ノ $\mathfrak{p}$ ニ對シテ，適當ナ $r^*_{\mathfrak{p}}\in\Delta$ ト $\mathfrak{p}$ ノ適當ナ近傍 $e^*_{\mathfrak{p}}$ ヲ取レバ，スベテノ $\mathfrak{q}\in e^*_{\mathfrak{p}}$ ニ対シテ $r^*_{\mathfrak{p}}\leqq f(\mathfrak{q})\leqq r^*_{\mathfrak{p}}+\varepsilon$ トナル。即チ $\mathfrak{M}(L)$ ノ open covering $(e^*_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{p}\in\mathfrak{M}(L))$ カラ finite covering $e_1,\cdots\cdots,e_m$ ヲ取出シ，$e_i=e^*_{\mathfrak{p}}$ ニ對應スル $r^*_{\mathfrak{p}}$ ヲ r_i トスル。コノトキ $e_ie_j=0$ $(i\neq j)$ トシテ選ブ（コレガ出来ル）；即チ $\{e_1,\cdots\cdots,e_m\}\perp$．ソコデ $A^\varepsilon=e_1r_1\dagger+\cdots\cdots+e_mr_m\dagger$ ハ存在シ，$e_iA^\varepsilon=e_ir_i\dagger$　$i=1,\cdots\cdots,m$ トナル。任意ノ $\mathfrak{p}$ ヲ取レバ，$e_1+\cdots\cdots+e_m=1$ デアルカラ，或ル e_i ガ $\in\mathfrak{p}$，ソシテ上式カラ $[\mathfrak{p}(A^\varepsilon)]=r_i$．従ッテ常ニ

$$[\mathfrak{p}(A^\varepsilon)]\leqq f(\mathfrak{p})\leqq[\mathfrak{p}(A^\varepsilon)]+\varepsilon$$

同様ニ，任意ノ正數 ε^* ニ對シテ，適當ナ B^{ε^*} ヲ取レバ，スベテノ $\mathfrak{p}$ ニツイテ $[\mathfrak{p}(B^{\varepsilon^*})]-\varepsilon^*\leqq f(\mathfrak{p})\leqq[\mathfrak{p}(B^{\varepsilon^*})]$ トナル。従ッテ $f_{A^\varepsilon}\leqq f\leqq f_{B^{\varepsilon^*}}$ デアルカラ，定理ノ前半ニヨリ，$A^\varepsilon\leqq B^{\varepsilon^*}$

今 $\lim \varepsilon_m = 0$ ナル $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots > 0$ ヲ取リ $A = \bigvee_{m=1}^{\infty} A^{\varepsilon_m}$ トスレバ，スベテノ m, n ニツイテ $A^{\varepsilon_m} \leqq B^{\varepsilon_m}$ デアルカラ $A \leqq B^{\varepsilon_n}$. 従ッテ

$$f(p) - \varepsilon_m \leqq [p(A^{\varepsilon_m})] \leqq [p(A)] \leqq [p(B^{\varepsilon_n})] \leqq f(p) + \varepsilon_n.$$

$\lim \varepsilon_m = 0$ デアルカラ $[p(A)] = f(p)$. 即チ $f = f_A$.

——（以上）——

§ 7

$(a) \in (A)$ ノトキ $[(a)] = [(A)]$ ト定義スル.

$(a) \in (A)$, $(b) \in (B)$, $(a)(b) = (0)$ ナラバ $(a) + (b) \in (A) + (B)$, 従ッテ $(a)(b) = (0)$ ナラバ $[(a) + (b)] = [(a)] + [(b)]$ デアル. 故ニ $[\ \ ]$ = positive modular functional デアル. (L) = quasi-distance δ ヲ導入スル：

$$\delta((a), (b)) = [(a) + (b)] - [(a)(b)]$$

δ ハ次ノ諸性質ヲ有スル。

$$\begin{cases} \delta((a), (b)) = \delta((b), (a)) \geqq 0, \quad \delta((a), (a)) = 0, \\ \delta((a), (b)) + \delta((b), (c)) \geqq \delta((a), (c)), \\ \delta((a), (b)) + \delta((c), (d)) \geqq \delta((a)(c), (b)(d)), \\ \delta((a), (b)) + \delta((c), (d)) \geqq \delta((a) + (c), (b) + (d)). \end{cases}$$

従ッテ $\delta(\ ,\ ) = 0$ ナル関係ハ (L) ノ束合同ヲ與ヘル

此ノ合同デ (L) ノ剰餘束 $(\overline{L})$ ヲ作ル. ソノ元即チ剰餘

類ノ $\overline{(a)}, \overline{(b)}, \cdots\cdots$ トスル: $\overline{(a)} = \{(x); \delta((x), (a)) = 0\}$. $(\overline{L})$ ハ L ニ準同型デアルカラ, ソレハ complemented, modular デアル. $\delta((a), (b)) = 0$ ナラバ $[(a)] = [(b)]$ デアルカラ, 類 $\overline{(a)}$ ノ函數トシテ $[\overline{(a)}] = [(a)]$ ト定義スルコトが出來ル。$[\ ]$ ハ $(\overline{L})$ 上ノ實數値 sharply positive modular functional デアル。

(注意) 如何ナル超限列 $\overline{(a_0)} > \overline{(a_1)} > \cdots > \overline{(a_\xi)} > \overline{(a_{\xi+1})} > \cdots\cdots$, $\overline{(b_0)} < \overline{(b_1)} < \cdots < \overline{(b_\xi)} < \overline{(b_{\xi+1})} < \cdots\cdots$; $\xi < \varphi$ ヲ考ヘテモ, 上記ノ事カラ, φ ハ高々第二級ノ順序數デアル. 從ッテ $\varphi = \omega$ ノトキ一上ノヨウナ列 $\{\overline{(a_\xi)}\}$ (ξ ハ自然數トナル), $\{\overline{(b_\xi)}\}$ ニ夫々 $\prod_\xi \overline{(a_\xi)}, \sum_\xi \overline{(b_\xi)}$ が必ズ存在スルコトが證明サレレバ, $(\overline{L})$ が完備束デアルコトニナル。

$(\overline{L})$ ニツイテ連續性ノ公理が成立スルコトヲ證明スルトキニモ $\varphi = \omega$ ノ場合ニ限レバヨイワケデアル。

サテ, 任意ノ $(a), (b)$ ノ間ニ $\sim, \precsim, \succsim$ ノ何レカが成立スルカラ, ソレヲ準同型寫像 $(a) \to \overline{(a)}$ デ $(\overline{L})$ ニ持込ンデ見レバ, 任意ノ $\overline{(a)}, \overline{(b)}$ ノ間ニ $\sim, \precsim, \succsim$ ノ何レカが成立スル. 從ッテ $[\ ]$ ハ $(\overline{L})$ 上ノ次元函數デアル。

補題 10. $\overline{(a_m)} \geqq \overline{(a)}$ $m = 1, 2, \cdots\cdots$, $[\overline{(a)}] = \inf [\overline{(a_m)}]$ ナラバ, $\overline{(a)}$ ハ $\overline{(a_m)}$ ノ meet $\prod_{m=1}^{\infty} \overline{(a_m)}$ デアル. 即チ, スベテノ m ニツイテ $\overline{(b)} \leqq \overline{(a_m)}$ ナラバ,

$(\overline{b}) \leqq (\overline{a})$ デアル。

証明. $(\overline{c}) = (\overline{b}) + (\overline{a})$ トスレバ $(\overline{a_m}) \geqq (\overline{c}) \geqq (\overline{a})$ $m = 1, 2, \cdots\cdots$ デアルカラ $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})] \geqq [(\overline{c})] \geqq [(\overline{a})]$, 従ッテ $[(\overline{c})] = [(\overline{a})]$. [ ] ハ sharply positive デアルカラ $(\overline{c}) = (\overline{a})$, 即チ $(\overline{b}) \leqq (\overline{a})$.

—— (以上) ——

補題11. $(\overline{a_m}) > (\overline{a_{m+1}})$ $m = 1, 2, \cdots\cdots$ ナラバ, $(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{a_m})$ ガ存在シ, $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})]$

証明. $(a_m) > (a_{m+1})$ ト仮定シテヨイ。$(a_m) \in (A^m)$ トスレバ $[(A^m)] = [(\overline{a_m})] > [(\overline{a_{m+1}})] = [(A^{m+1})]$ デアルカラ, $(A^m) > (r_m +) > (A^{m+1})$ ナル $r_m \in \Delta$ ガ存在スル、従ッテ Γ ガ n 型ノ場合ハ除外サレル。$(a_m) > (x_m) > (a_{m+1})$ ナル $(x_m) \in (r_m +)$ ガ存在スル。$(r_m +) > (r_{m+1} +)$ デアルカラ $r_m + > r_{m+1} +$. ソコデ補題4ニヨッテ

$$a_m^* \geqq a_{m+1}^*, \quad a_m^* \in r_m +, \quad (a_m^*) = (x_m) \quad m = 1, 2, \cdots\cdots$$

ナル $a_1^*, a_2^*, \cdots\cdots$ ガ存在スル。$a = \prod_{m=1}^{\infty} a_m^*$, $A = \bigwedge_{m=1}^{\infty} r_m +$ トスレバ $a \in A$. ソシテ明カニ $\inf. r_m \geqq [(A)]$ デアル。

$r_m \geqq r \in \Delta$ $m = 1, 2, \cdots\cdots$ トスレバ $A \geqq r +$

従ッテ $(A) \geqq (r +)$.

故ニ $[(A)] \geqq \sup (r : \inf. r_m \geqq r) = \inf. r_m$

$A = A_\infty$ ハ區間 $[0, 1]$ デ稠密デアルカラ）．從ッテ

$[(A)] = \inf. r_m$. $a \in A$ デアルカラ $(a) \in (A)$,

從ッテ $[(a)] = \inf. r_m = \inf. [(x_m)] = \inf. [(\overline{x_m})]$

又 $a^*_m \geqq a$ カラ $(\overline{x_m}) = (\overline{a^*_m}) \geqq (\overline{a})$ $m = 1, 2, \cdots\cdots$.

從ッテ補題 10 ニヨリ，$(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{x_m})$ $(a_m) > (x_m)$

$> (a_{m+1})$，從ッテ $(\overline{a_m}) \geqq (\overline{x_m}) \geqq (\overline{a_{m+1}})$ デアックカ

ラ $(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{a_m})$, $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})]$

——（以上）——

補題 12. $(\overline{a_m}) > (\overline{a_{m+1}})$ $m = 1, 2, \cdots\cdots$;

$(\overline{a}) = \prod_{m=1}^{\infty} (\overline{a_m})$ ナラバ任意ノ $(\overline{b})$ ニツイテ

$(\overline{a}) + (\overline{b}) = \prod_{m=1}^{\infty} ((\overline{a_m}) + (\overline{b}))$ デアル。

證明. $(\overline{a_m}) > (\overline{a})$ デアルカラ

$$(\overline{a_m}) + (\overline{b}) \geqq (\overline{a}) + (\overline{b}) \quad m = 1, 2, \cdots\cdots$$

$$[(\overline{a_m})] - [(\overline{a})] \geqq [(\overline{a_m}) + (\overline{b})] - [(\overline{a}) + (\overline{b})] \geqq 0$$

補題11ニヨッテ $[(\overline{a})] = \inf. [(\overline{a_m})]$ デアルカラ，上式ニヨッテ

$$[(\overline{a}) + (\overline{b})] = \inf. [(\overline{a}) + (\overline{b})]$$

從ッテ補題 10 カラ $(\overline{a}) + (\overline{b}) = \prod_{m=1}^{\infty} ((\overline{a_m}) + (\overline{b}))$ ヲ得ル。

——（以上）——

補題 4, 10 ノ双對モ明カニ成立スルカラ，補題 11, 12

ノ双對モ成立スル。前ノ注意ニヨレバ，此レデ $(\overline{L})$ ガ完全束デアルコトト，ソレガ連續性ノ公理ヲ滿タスコトガ示サレタワケデアル。ソレ故 $(\overline{L})$ ハ連續幾何デアル。任意ノ $(\overline{a}), (\overline{b})$ ニツイテ $(\overline{a}) \sim (\overline{b})$ デアルカラ $(\overline{L})$ ハ既約デアル。

此迄ハシバラク $\mathfrak{p}$ ヲ固定シテ考ヘタガ，アラユル（Z ノ）極大双對 ideal $\mathfrak{p}$ ニツイテノ $(\overline{L})$ ノ直和ヲ考ヘテ見ル。$\mathfrak{p}$ ヲ明示スルタメニ $(\overline{L})$ ヲ $\overline{\mathfrak{p}(L)}$, $(\overline{a})$ ヲ $\overline{\mathfrak{p}(a)}$, $[\overline{(a)}]$ ヲ $[\overline{\mathfrak{p}(a)}]$ ト記ス。對應 $a \longrightarrow (a)$ 及ビ $(a) \longrightarrow \overline{(a)} = \overline{\mathfrak{p}(a)}$ ハ束準同型デアルカラ，對應 $\longrightarrow \sum_{\mathfrak{p}} \oplus \overline{\mathfrak{p}(a)}$ モ束準同型對應デアル。又 a ヲ固定シテオイテ $[\overline{\mathfrak{p}(a)}] = [\mathfrak{p}(a)]$ ヲ考ヘレバ，ソレハ前§ノ $f_a(\mathfrak{p})$ ニ他ナラナイ。今 $a \neq b$ トスレバ $a+b > ab$ ニヨリ $f_{a+b} > f_{ab}$，即チ或ル $\mathfrak{p}$ ニ就イテ $[\overline{\mathfrak{p}(a+b)}] > [\overline{\mathfrak{p}(ab)}]$，從ッテ $[\overline{\mathfrak{p}(a)} + \overline{\mathfrak{p}(b)}] > [\overline{\mathfrak{p}(a)} \cdot \overline{\mathfrak{p}(b)}]$，從ッテ $\overline{\mathfrak{p}(a)} \neq \overline{\mathfrak{p}(b)}$ トナル。即チ $a \neq b$ ナラバ $\sum \oplus \overline{\mathfrak{p}(a)} \neq \sum \oplus \overline{\mathfrak{p}(b)}$。ソコデ：

定理2. L ハ既約ナ連續幾何ノ直和 $\sum \oplus \overline{\mathfrak{p}(L)}$ ノ或ル部分束ニ，對應 $a \longrightarrow \sum \oplus \overline{\mathfrak{p}(a)}$ ニヨッテ，束同型ニ對應スル。$[\overline{\mathfrak{p}(a)}]$ ハ a デ定マル $\mathfrak{p}$ ノ連續函數デアル。

L ガ ∞ 型或ハ n 型デアル場合ニ從ッテ，各 $\overline{\mathfrak{p}(L)}$ ガ無限次元或ハ n 次元デアルコトハ言フマデモナイガ，n 型ノ L ニツイテハ (L) モ $(\overline{L})$ モ本質的ニハ同ジモノデアル

コトハ注意ヲ要スル。ソノ理由ハ簡単デ，前§ニ述ベタ様ニ，$(A) > (B)$ ナラバ $[(A)] > [(B)]$ デアルカラ，$(a) > (b)$ ナラバ $[(a)] > [(b)]$，従ッテ $(a) \neq (b)$ ナラバ $\delta((a), (b)) = 0$ トナルカラ，類 $\overline{(a)}$ ハ (a) ノミカラ成ルト云フノデアル。