1122. 半順序集合ノ直積ニツイテ

横山　金作（阪大學生）

Birkhoff ハ半順序集合ノ直積分解ノ一意性ヲ最小元及ビ最大元ノ両方ノ存在ヲ假定シテ証明シテ井マスガ，（Lattice Theory Chap. II. §30）片方ダケノ存在デ充分ノ様デス。以下之ヲ証明シマス。推論ヲ明確ニスルタメニ，direct join 及ビ direct meet ノ概念ヲ導入シテミマシタガ，之等ハ Birkhoff ニ依ッテ定義サレテ井ル直積ト等値ナ概念デアッテ，アル場合ニハ便利デハナイカト思ヒマス。以下ノ所論ハ束ノ場合ニハモット簡明ニナリマスガ，ココデハ一般ノ半順序集合ニツイテ論ズルコトニシマス。

本稿ハセミナリーノ材料ニ推敲ヲ加ヘタモノデアリマスガ，ソノ成立ニ當リマシテ特ニ角谷静夫先生ニハ原稿ノ閲讀ソノ他多大ノ御指導ヲ蒙リマシタ．慎ンデ拝謝ノ辞ヲ申シ述ベマス。

§1.　定義1.　$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ デ與ヘラレタ半順序集合トスル．$x_1 \in X_1, \cdots\cdots, x_n \in X_n$ ナル n 個ノ元ノ組合セ $[x_1, \cdots\cdots, x_n]$ ノスベテカラナル集合ヲ P トスル．P ニ於テ二ツノ元ノ間ノ関係 $[x_1, \cdots\cdots, x_n] = [x'_1, \cdots\cdots, x'_n]$ 及ビ $[x_1, \cdots\cdots, x_n] \geqq [x'_1, \cdots\cdots, x'_n]$ ヲ夫々 $x_i = x'_i$, $i = 1, \cdots\cdots, n$ 及ビ $x_i \geqq x'_i$　$i = 1, \cdots$

----, x_i ニ依テ定義スレバ，Pハコノ順序ニ関シテ半順序集合トナル．コノ半順序集合Pヲn個ノ半順序集合 X_1, ---- ----, X_n ノ直積ト云ヒ，コレヲ $P = X_1 X_2, \cdots\cdots X_n$ デ表ハス。x_i ヲ $[x_1, \cdots\cdots, x_n]$ ノ X_i 成分ト云フ。

(A) $X_1, \cdots\cdots, X_n$ ヲ半順序集合Pノ部分集合トスル．任意ノ組合セ $[x_1, \cdots\cdots, x_n]$ $(x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots\cdots, n)$ ニ対シテ $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$ ガ存在スルトキ，アラユル $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$ ノ集合ヲ $X_1 \cup \cdots\cdots \cup X_n$ デ表ス．ソノ dual ヲ $X_1 \cap \cdots\cdots \cap X_n$ デ表ス。

定義 2. 半順序集合Pノ部分集合 $X_1, \cdots\cdots, X_n$ ニ対シ

(1) $P = X_1 \cup \cdots\cdots \cup X_n$

(2) $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n \geqq x'_1 \cup \cdots\cdots \cup x'_n$ ナラバ

$x_i \geqq x'_i$, $i = 1, \cdots\cdots, n$

ガ成立スルトキ，Pハ $X_1, \cdots\cdots, X_n$ ノ direct join ニ分解サレルト云ヒ，$P = X_1 \circledcup X_2 \circledcup \cdots\cdots \circledcup X_n$，或ハ $P = \overset{n}{\underset{i=1}{\circledcup}} X_i$ デ表ハス．direct join ノ dual ヲ direct meet ト云ヒ，$P = X_1 \circledcap \cdots\cdots \circledcap X_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\circledcap}} X_i$ デ表ハス。

(B) $P = X_1 \circledcup X_2 \circledcup \cdots\cdots \circledcup X_n$ ナルトキ，$x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n = x'_1 \cup \cdots\cdots \cup x'_n$ $(x_i, x'_i \in X_i)$ ナルタメニハ $x_i = x'_i$, $i = 1, \cdots\cdots, n$ ナルコトガ必要ニシテ充分デ

アル。即チ P ノ各元ノ X_i 成分ハ一意ニキマル. dualモ成立。

(C) $P = X_1 \circledcup \cdots\cdots \circledcup X_n$ ナルトキ, X'_i ヲ X_i ニ同型ナ任意ノ半順序集合トシ($i=1, \cdots\cdots, n$), $X'_1 \cdots\cdots, X'_n$ ノ直積ヲ $P' = X'_1 X'_2 \cdots\cdots X'_n$ トスレバ, P' ハ P ニ同型デアル. $P = X_1 \circledcap X_2 \circledcap \cdots\cdots \circledcap X_n$ ニツイテモ同様.

念ノタメ同型ノ定義ヲ述ベル. 半順序集合 P ヲ半順序集合 P' ニ写ス一對一デ両単調ナ変換が存在スルトキ, P' ハ P ニ同型(順序同型)デアルトイフ。

(D) 直積 $P = X_1 X_2 \cdots\cdots X_n$ ニ於テ, 各因子 X_i ハ夫々最小元 O_i ヲ有スルトスル $[O_1, \cdots\cdots, O_{i-1}, x_i, O_{i+1}, \cdots\cdots, O_n]$ ナル P ノ元ノスベテノ集合ヲ X'_i トスレバ. X'_i ハ X_i ニ同型デ P ハ $X'_1, \cdots\cdots, X'_n$ ノ direct join ニ分解サレル. 即チ $P = X'_1 \circledcup X'_2 \circledcup \cdots\cdots \circledcup X'_n$

(D') 直積 $P = X_1 X_2 \cdots\cdots X_n$ ニ於テ, 各因子 X_i ハ夫々最大元 e_i ヲ有スルトスル. $[e_1, \cdots\cdots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \cdots\cdots, e_n]$ ナル P ノ元ノスベテノ集合ヲ X'_i トスレバ, X'_i ハ X_i ニ同型デ P ハ $X'_1, \cdots\cdots, X'_n$ ノ direct meet ニ分解サレル. 即チ $P = X'_1 \circledcap X'_2 \circledcap \cdots\cdots \circledcap X'_n$.

(C), (D) (D') ニヨリ同型ナ半順序集合ヲ同一視スルナラバ, 最小元(最大元)ノ存在ノ下ニ direct join (direct meet) ト直積トハ等値ナ概念デアルコトが分ル。

§2. (A) direct join ニ関シ次ノコトが成立スル。

(i) $P = X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_2 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} \cdots\cdots \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_n$ ナルトキハ因子ノ順序ヲ全ク勝手ニカヘテ $P = X_{k_1} \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_{k_2} \mathbin{\textcircled{$\cup$}} \cdots\cdots \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_{k_n}$ トスルコトが出来ル。

(ii) $X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} (X_2 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_3)$ が意味ヲモツナラバ $X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_2 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_3$ モ意味ヲモチ両者ハ一致スル。$(X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_2) \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_3$ が意味ヲモツナラバ，$X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_2 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_3$ モ意味ヲモチ両者ハ一致スル。$(X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_2) \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_3$ 及ビ $X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} (X_2 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_3)$ が共ニ意味シモツナラバ両者ハ一致スル。

老婆心ながラ，$x_1 \cup x_2 \cup x_3$ ノ存在カラ $x_1 \cup x_2$ ノ存在ハ一般ニ出テコナイ。

(B) $P = X_1 \mathbin{\textcircled{$\cup$}} \cdots\cdots \mathbin{\textcircled{$\cup$}} X_n$ ナルトキ，P ノ有限個ノ元 $x, y, \cdots\cdots, w$ ヲ成分デ表シ

$$x = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$$

$$y = y_1 \cup \cdots\cdots \cup y_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w = w_1 \cup \cdots\cdots \cup w_n$$

トスル。

(i) 若シ $x_i \cup y_i \cup \cdots\cdots \cup w_i$ ($i = 1, \cdots\cdots, n$) がスベテ存在シテ夫々 $x_i \cup y_i \cup \cdots\cdots \cup w_i \in X_i$ ($i = 1, \cdots\cdots, n$) ナラバ $x \cup y \cup \cdots\cdots \cup w$ モ存在シ，ソノ X_i 成分ハ $x_i \cup y_i \cup \cdots\cdots \cup w_i$ デアル。

(ii) 若シ $x_i \cap y_i \cap \cdots\cdots \cap w_i$ ($i=1, \cdots\cdots, n$) ガスベテ存在シテ夫レ $x_i \cap y_i \cap \cdots\cdots \cap w_i \in X_i$ ($i=1, \cdots\cdots, n$) ナラバ $x \cap y \cap \cdots\cdots \cap w$ モ存在シ，ソノ X_i 成分ハ $x_i \cap y_i \cap \cdots\cdots \cap w_i$ デアル。

証明. (i) $x_i \cup y_i \cup \cdots\cdots \cup w_i = p_i$ トオク. 假定ニヨリ $p_i \in X_i$ デアルカラ $p_1 \cup p_2 \cup \cdots\cdots \cup p_n = p$ ガ存在スル. 明カニ $p \geqq x, y, \cdots\cdots, w$ 今 $q \geqq x, y, \cdots\cdots, w$ ナル任意ノ q ヲトリソノ成分ニヨル表現ヲ $q = q_1 \cup q_2 \cup \cdots\cdots \cup q_n$ トオク. $q_i \geqq x_i, y_i, \cdots\cdots, w_i$

故ニ $q_i \geqq p_i$ 従ッテ $q \geqq p$.

故ニ $p = x \cup y \cup \cdots\cdots \cup w$

(ii) ハ (i) ト同様

(C) $P = X_1 \cup \cdots\cdots \cup X_n$ ニ於テ，P ガ最小元 0 ヲ有スルナラバ

(i) $X_i \ni 0$ $\quad i=1, \cdots\cdots, n$

(ii) $x_i \in X_i$, $y \leqq x_i$ ナラバ $y \in X_i$ $\quad i=1, \cdots\cdots, n$

(iii) (B) ノ記号ヲ襲用スル. 若シ $x \cap y \cap \cdots\cdots \cap w$ ガ存在スルナラバ，スベテノ i ニ對シ $x_i \cap y_i \cap \cdots\cdots \cap w_i$ モ存在シ $x \cap y \cap \cdots\cdots \cap w$ ノ X_i 成分ヲ表ス。

(iv) $x, y, \cdots\cdots, w \in X_i$ 且ツ $x \cup y \cup \cdots\cdots \cup w$ ガ存在スルナラバ $x \cup y \cup \cdots\cdots \cup w \in X_i$ ($i=1, \cdots\cdots, n$)

証明 (i) 0 ノ成分ニヨル表現ヲ $0 = x_1 \cup x_2 \cup \cdots\cdots \cup x_n$, $x_i \in X_i$ トスル. コレヨリ $0 \leqq x_i \leqq x_1 \cup \cdots\cdots$

$\cup\, x_n = 0 \qquad \therefore\ x_i = 0$

(ii) $x_i \in X_i$, $y \leqq x_i$ トスル. y ノ成分ニヨル表現ヲ $y = y_1 \cup y_2 \cup \text{----} \cup y_n$, $y_i \in X_i$ トスル. $y \leqq x_i$ ヲ成分デ表スト $y_1 \cup y_2 \cup \text{----} \cup y_n \leqq 0 \cup 0 \cup \text{----} \cup 0 \cup x_i \cup 0 \cup \text{----} \cup 0$

$\therefore$ $j \neq i$ ナラバ $y_j = 0 \qquad \therefore\ y = y_i \in X_i$

(iii) $x \cap y \cap \text{----} \cap w = p$ トオキ $p = p_1 \cup p_2 \cup \text{----} \cup p_n$, $p_i \in X_i$ トスル. $p_i \leqq x_i, y_i, \text{----}, w_i$. 今 $q_i \leqq x_i, y_i, \text{----}, w_i$ ナル任意ノ $q_i \in P$ ヲトル. $x_i \in X_i$ デアルカラ (ii) ニヨリ $q_i \in X_i$. 故ニ $q_1 \cup \text{----} \cup q_n = q$ ガ存在スル. $q \leqq x, y, \text{----}, w \quad \therefore\ q \leqq p \quad \therefore\ q_i \leqq p_i$

$\therefore\ p_i = x_i \cap y_i \cap \text{----} \cap w_i$

(iv) $i = 1$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ.

$$x = x \cup 0 \cup \text{----} \cup 0$$
$$y = y \cup 0 \cup \text{----} \cup 0$$
$$\text{------------------}$$
$$w = w \cup 0 \cup \text{----} \cup 0$$

ハ夫々 $x, y, \text{----}, w$ ノ成分ニヨル表現デアル.

$x \cup y \cup \text{----} \cup w = p$ ノ成分ニヨル表現ヲ $p = p_1 \cup p_2 \cup \text{----} \cup p_n$ トスル. $x = x \cap p = x \cap p$ ((C)(iii))

$\therefore\ x \leqq p_1$ 同様ニシテ $y \leqq p_1, \text{----}, w \leqq p_1$

$\therefore\ p \leqq p_1 \qquad \therefore\ p = p_1 \in X_1$

(D) $P = X_1 \textcircled{\scriptsize$\cup$} X_2 \textcircled{\scriptsize$\cup$} \text{------} \textcircled{\scriptsize$\cup$} X_n$ ナラバ X_i ト X_j トノ

共通集合 $(i \neq j)$ ハ高々一ツノ元ヲ含ム．特ニ．P ガ 0 ヲ有スルトキハ X_i ト X_j トノ共通集合ハ 0 ダケカラナル。

(E) $P = X_1 \textcircled{\scriptsize$\cup$} \cdots\cdots \textcircled{\scriptsize$\cup$} X_n$ デ且ツ P ハ最小元 0 ヲモツトスル。

(i) $X_1, \cdots\cdots, X_n$ ノ中カラ任意ニトッタ $m (\leqq n)$ 個（但シ重複ヲ許サナイ）$X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots\cdots, X_{k_m}$ ニ對シ $X_{k_1} \textcircled{\scriptsize$\cup$} \cdots\cdots \textcircled{\scriptsize$\cup$} X_{k_m}$ ハ意味ヲモツ。

(ii) 集合 $\{1, \cdots\cdots, n\}$ ノ任意ノ分割ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_k$ トシ $\underset{i \in \alpha_1}{\textcircled{\scriptsize$\cup$}} X_i = A_1 \cdots\cdots, \underset{i \in \alpha_k}{\textcircled{\scriptsize$\cup$}} X_i = A_k$ トオクト $P = A_1 \textcircled{\scriptsize$\cup$} \cdots\cdots \textcircled{\scriptsize$\cup$} A_k$

証明．$X_1, \cdots\cdots, X_n$ ノ中カラトッタ m 個ヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ．$x_1 \in X_1, \cdots\cdots, x_m \in X_m$ ニ対シ，$x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_m \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0$ ハ存在スル．從ッテ $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_m$ モ存在シ両者ハ一致スル．$x_1, \cdots\cdots, x_m$ ハ夫々 $X_1, \cdots\cdots, X_m$ ノ任意ノ元デアルカラ $X_1 \cup \cdots\cdots \cup X_m$ ハ意味ヲモツ．$x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_m \geqq y_1 \cup \cdots\cdots \cup y_m$ ナラバ $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_m \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0 \geqq y_1 \cup \cdots\cdots \cup y_m \cup 0 \cup \cdots\cdots \cup 0$

從テ $x_1 \geqq y_1, \cdots\cdots, x_m \geqq y_m$　故ニ $X \cup \cdots\cdots \cup X_m = X_1 \textcircled{\scriptsize$\cup$} \cdots\cdots \textcircled{\scriptsize$\cup$} X_m$

(ii) (E)(i) 及ビ (B)(i) カラ明カデアル。

(F) 任意ノ分解ニ於テ，唯一ツノ元カラ成ル因子ヲ平

凡ナ因子ト云ヒ，一ツノ因子ヲ除キ他ノ因子ガ悉ク平凡ナルトキ平凡ナ分解トイフ．平凡ナラザル分解ヲ有セズ而モ平凡ナラザル因子ヲ素因子ト云フ。

(G) P ガ 0 ヲ有スルナラバ direct join ニヨル分解ニ於テ平凡ナ因子ハ 0 ノミカラナリ，平凡ナ因子ハ除クコトガ出来ル。

証明． 前半ハ明カ．後半ニツイテ $P = X_1 ⓤ \cdots\cdots ⓤ X_n$ トシ，$X_1, \cdots\cdots, X_n$ ノ中カラ平凡ナ因子ヲ除イタモノヲ $X_{k_1}, \cdots\cdots, X_{k_m}$ トスル．$X_{k_1} ⓤ \cdots\cdots ⓤ X_{k_m}$ ハ意味ヲモツ（(E) (i)）而シテ $P = X_{k_1} ⓤ \cdots\cdots ⓤ X_{k_m}$ ナルコトハ明カデアラウ。

定理． 最小元 0 ヲ有スル半順序集合ヲ P トスル．P ガ素因子ノミカラナル direct join ニ分解サレルナラバ，カヽル分解ハ一意ニキマル．平凡ナ因子ヲ含マヌ任意ノ分解ハコノ分解ニ於テ因子ヲ適当ニ組ニ分ケ括弧ニ括ルコトニヨッテ得ラレル．（(E) (ii) 参照）

証明 (1°) P ノ direct join ニヨル二通リノ分解ヲ

$$P = X_1 ⓤ \cdots\cdots ⓤ X_n \qquad (1)$$

$$P = Y_1 ⓤ \cdots\cdots ⓤ Y_m \qquad (2)$$

トスル．X_i ト Y_j トノ共通集合ヲ $Z_{i,j}$ トオクト

$$X_i = Z_{i,1} ⓤ \cdots\cdots ⓤ Z_{i,m} \quad i = 1, \cdots\cdots, n \qquad (3)$$

$$Y_j = Z_{1,j} ⓤ \cdots\cdots ⓤ Z_{n,j} \quad j = 1, \cdots\cdots, m \qquad (4)$$

ガ成立スル．(4) ヲ証明セウ．Y_j ノ任意ノ元ヲ y トシ y ノ (1) ニヨル表現ヲ $y = x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n,\ x_i \in X_i$ トスル．

$x_i \leqq y,\ y \in Y_j \qquad \therefore\ x_i \in Y_j \quad ((c)(ii))$

縦ヲ $\quad x_i \in Z_{ij} \qquad \therefore\ Y_j \subset Z_{1,j} \cup Z_{2,j} \cup \cdots\cdots \cup Z_{n,j}$

逆ニ $x_i \in Z_{i,j}$，$i = 1, \cdots\cdots, n$ トスルト $x_i \in Y_j$，$i = 1, \cdots\cdots, n$ デ $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n$ ガ存在スル．故ニ $x_1 \cup \cdots\cdots \cup x_n \in Y_j \quad ((c)(iv))$

故ニ $\quad Y_j = Z_{1,j} \cup Z_{2,j} \cup \cdots\cdots \cup Z_{n,j}$

$= Z_{1,j} \circledcup Z_{2,j} \circledcup \cdots\cdots \circledcup Z_{n,j}$

(3) ヲ (1) ニ代入シ

$$\Psi = \mathop{\circledcup}_{i=1}^{n} \mathop{\circledcup}_{j=1}^{m} Z_{ij} = \mathop{\circledcup}_{i,j} Z_{ij} \tag{5}$$

(2°)′ 今 (1) モ (2) モ共ニ素因子ノミヨリナル direct join トスル．(3) ニ於テ X_i ガ素因子ナルコトカラ $\{Z_{i,1}, \cdots\cdots, Z_{i,m}\}$ ハ全体トシテ $\{X_i, *, *, \cdots\cdots, *\}$ トー致スル．茲ニ $*$ ハ 0 ノミカ

（紙面都合上　以下次号）