1119. Locally compact abelian group の normed ring ニ就イテ

小平　邦彦（東京文理大）
角谷　静夫（阪　大）

G ヲ locally compact abelian group トシ

G ノ Haar measure ニ関シテ G ノ上デ square integrable ナ G ノ上デ定義サレタ complex valued measurable functions 全体ノ作ル Hilbert space ヲ $L^2(G)$ ニテ表ハス。 G 上ノ translation $g \to g-a$ ハ $L^2(G)$ ノ unitary transformation U_a ヲ induce スル。 $L^2(G)$ ノ bounded linear transformation B ノ全体 $\mathfrak{B}$ ハ

$$(1) \quad \| B \| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \| B(x) \|$$

ナル norm ニ関シテ (commutative デハナイ) normed ring ヲ作ルが、ソノ中デ特ニ U_a ナル形ノ unitary transformation ノ finite complex linear combination ニヨッテ (1) ノ norm ニ関シテ一様近似サレ得ルヤウナ bounded linear transformation B ノ全体 $\mathfrak{R}$ ハソレ自身デ一ツノ commutative ナ normed ring ヲ作ッテキル。即チ $\mathfrak{R}$ ハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$(2) \quad \left\| B - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i} \right\| < \varepsilon$$

トナル如キ $a_i \in G$ ト complex numbers α_i $(i=1, \cdots\cdots, n)$ が存在スル如キ $B \in \mathfrak{B}$ 全体ノ作ル normed ring デアル。

此ノ normed ring $\mathfrak{R}$ ノ maximal ideal ノ一般ノ形ヲ決メヨウト云フノが本談話ノ目的デアル。先ヅ M

ヲ R ノ任意ノ maximal ideal トスレバ $R \to R/M$ = thering of complex numbers ナル homomorphism ヲ與ヘルカラ、コノ homomorphism ヲ φ_M ニテ表ハスバ $a \to U_a \to \varphi_M(U_a) \equiv \chi_M(a)$ ハ group G ノ complex number $\chi_M(a)$ ニヨル representation ヲ與ヘル。シカモ $|\chi_M(a)| = |\varphi(U_a)| \leqq \|U_a\| = 1$, $|(\chi_M(a))^{-1}| = |\chi_M(a^{-1})| \leqq 1$ デアルカラ $|\chi_M(a)| = 1$ トナリ、シタガッテ $\chi_M(a)$ ハ G ノ上デ定義サレタ character デアル。シカシ $\chi_M(a)$ ガ G 上デ連續デアルカドウカト云フコトハ分ラナイ。

次ニ逆ニ任意ノ G ノ character（必ズシモ連續デナイ）ヲ與ヘルト　コレニ對シテ normed ring R ノ maximal ideal M ガ決ッテ $\chi(a) = \chi_M(a)$ トナルコトヲ証明シヨウ。コノタメニハ normed ring R ヲ "concrete" ニ represent スルコトヲ考ヘル。

先ヅ G ノ pontjaguin ノ意味ノ character group ヲ G^* ニテ表ハス。G^* ハ Pontrjaguin ノ topology ニ関シテ locally compact デアルカラ、G^* ノ Haar measure ヲ使ッテ G^* 上ノ Hilbert space $L^2(G^*)$ ヲ作ルコトガ出来ル。シカモ G^* ノ上ノ Haar measure ヲ適當ニ normieren シテ置ケバ Plancherel ノ定理ガ成立スル。即チ任意ノ $x(g) \in L^2(G)$ ニ對シテ

(3) $x^*(g^*)=\int_G x(g)(g,g^*)dg$, $x^*=P(x)$

ト置ケバ(但シ積分ハ *limit in mean* ノ意味ニトル)
$x^*(g^*)\in L^2(G^*)$ デアッテシカモ

(4) $\int_{G^*}|x^*(g^*)|^2 dg^*=\int_G |x(g)|^2 dg$

(即チ $\|x^*\|=\|x\|$)ヲ得ル. 更ニ任意ノ $x^*(g^*)$ $\in L^2(G^*)$ ニ對シテ

(5) $x(g)=\int_{G^*} x^*(g^*)\overline{(g,g^*)}\,dg^*$, $x=Q(x^*)$

ト置ケバ(但シ積分ハ *limit in mean* ノ意味ニトル)

$x(g)\in L^2$ デアリ、シカモ(4)ガ成立スル. 最後ニ P ト Q トハ互ニ inverse operator デ $PQ=1$, $QP=1$ ガ成立スル. 今 $L^2(G)$ ノ bounded linear operator A ニ correspond スル $L^2(G^*)$ ノ bounded linear operator ヲ A^* トスレバ(即チ $A^*=PAQ$), 明カニ

(6) $\|A^*\|=\|A\|$

デアリ、シカモ $A=U_a$ ナルトキ A^* ハ

(7) $x^*(g^*)\to(a,g^*)x^*(g^*)$

ナル operator 即チ (a,g^t) ナル函數ヲ掛ケル operator デアル。シタガッテ $A=\sum_{i=1}^n \alpha_i U_{a_i}$ ナル

Aニ對シテハ A^* ハ

$$(8)\quad x^*(g^*) \to \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)\right) x^*(g^*)$$

ナル operator デアル. ヨッテ

$$(9)\quad \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i} \right\|$$

$$= \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i} \right)^* \right\|$$

$$= \sup_{g^* \in G^*} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*) \right|$$

即チ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i}$ ナル operator ノ norm ハ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)$ ナル G^* ノ上デ定義サレタ almost periodic function ノ G^* 上ノ sup. ト一致スル. 然ルニ $b^*(g^*)$ ヲ G^* ノ上デ定義サレタ任意ノ complex valued almost periodic function (Bohr ノ意味ノ) トスルトキ, 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$(10)\quad \sup_{g^* \in G^*} \left| b^*(g^*) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*) \right| < \varepsilon$$

ナル如キ character (g, g^*) ノ finite linear combination $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i, g^*)$ ガ存在スルカラ, 結局

$\boxed{\text{定理 1}}$ normed ring R ハ G^* 上デ定義サレタスベテノ complex valued almost periodic function ノ作ル normed ring $AP(G^*)$ ト isomorph 且ツ isometric デアル。

但シ $AP(G^*)$ ニ於テハ ring product ハ普通ノ意味ノ函數ノ掛ケ算デアリ （即チ $b_1^* b_2^*(g^*) = b_1^*(g^*) b_2^*(g^*)$） 又 norm ハ

$$\text{(11)} \quad \|b^*\| = \sup_{g^* \in G^*} |b^*(g^*)|$$

ニヨッテ與ヘラレル。

良ク知ラレタ如ク 任意ノ topological group G ニ對シテ、若シモ G 上ニ sufficiently many almost periodic functions ガ存在スレバ（即チ任意ノ $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$, ニ對シテ $b(g_1) \neq b(g_2)$ ナル G 上デ定義サレタ continuous almost periodic function $b(g)$ ガ存在スルナラバ）、G ヲ dense ナ subgroup ニ含ム如キ compact Group $\overline{G}$ ガ存在シテ G 上デ定義サレタ任意ノ continuous almost periodic function $b(g)$ ハ $\overline{G}$ デノ continuous function $\overline{b}(\overline{g})$ ニ拡張出來ル。$\overline{G}$ ノコトヲ G ノ compactified group ト呼ブ。

逆ニ $\overline{G}$ 上デ定義サレタ任意ノ continuous function $\overline{b}(\overline{g})$ ハ明カニ $\overline{G}$ デ almost periodic デアリ、シタガッテソノ G 上ノ部分 $b(g)$ ハ G 上ニテ almost periodic ニナル。此ノ如クシテ結局 G 上

デ定義サレタスベテノ complex valued almost periodic function ノ作ル normed ring AP(G) ハ $\overline{G}$ 上デ定義サレタスベテノ complex valued continuous functions ノ作ル normed ring C($\overline{G}$)(但シ C($\overline{G}$) ニ於ケル ring product 及ビ norm ハ AP($\overline{G}$) ノトキト同ジヤウニ定義スル。實ハ $\overline{G}$ が compact デアルカラ AP($\overline{G}$) トC($\overline{G}$) トハ同ジモノデアル) ト isomorphic 且ツ isometric デアル。

然ルニ C($\overline{G}$) ノ maximal ideal ト $\overline{G}$ ノ点トノ間ニ one-to-one correspondence ノアルコトハ良ク知ラレタ事實デアルカラ G ノ代リニ G^* ヲ取ッテ考ヘレバ(G^* ハ locally compact abelian デアルカラ sufficiently many almost periodic function が存在スル)

$\boxed{\text{定理2}}$ normed ring R ハ G ノ character group G^* ノ compactified group $\overline{G^*}$ 上デ定義サレタスベテノ complex valued continuous functions ノ作ル normed ring ト isomorph 且ツ isometric デアリ、シタガッテ R ノ maximal ideal M ト $\overline{G^*}$ ノ点 $\overline{g}^*$ トノ間ニ one-to-one correspondence が成立スル。シカモ R ノ maximal ideals M ノ作ル space $\mathfrak{M}$ ハ (weak topology

ヲツケレバ $\overline{G}^*$ ト homeomorph デアル。

更ニ進ンデ今度ハ $\overline{G}^*$ ノ点 $\overline{g}^*$ ト、G ノ continuous トハ限ラナイ任意ノ character トノ間ニ one-to-one correspondence ガアルコトヲ示サウ。コノタメ先ヅ G^* ヲ compactify シテ $\overline{G}^*$ ヲ得ル方法ヲ思ヒ出シテ見ル。G^* ヲ compactify シテ $\overline{G}^*$ ヲ得ルニハ先ヅ G^* 上ニ

$$(14)\quad V_\alpha(g_0^*)=\{g^* \mid |b_i^*(g^*)-b_i^*(g_0^*)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n\},$$
$$\alpha=\{b_1^*,\cdots\cdots,b_n^*;\ \varepsilon\},$$
$$b_i^*\in AP(G^*),\ i=1,\cdots\cdots,n$$

ナル形ノ近傍系 $\mathcal{V}_\alpha=\{V_\alpha(g_0^*) \mid g_0^*\in G^*\}$ ニヨッテ uniform topology ヲ導入シ、ソノ uniform topology ニ関シテ G^* ヲ compactify スレバヨカッタノデアッタ。然ルニ任意ノ $b^*(g^*)\in G^*$ 及ビ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ (10) ヲ満足スル如キ character (a, g^*) ノ finite linear combination $\sum_{i=1}^n \lambda_i(a, g^*)$ ガ存在スルカラ，結局

$$(15)\quad W_\beta(g_0^*)=\{g^* \mid |(a_i, g^*)-(a_i, g_0^*)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n\},$$
$$\beta=\{a_1,\cdots\cdots,a_n;\ \varepsilon\},\ a_i\in G,$$
$$i=1,\cdots\cdots,n$$

ナル如キ近傍系 $\mathcal{W}_\beta=\{W_\beta(g_0^*)\,|\,g_0^*\in G^*\}$ ニヨル uniform topology ヲ考ヘテモ同ジコトデアル。

次ニGト上デ定義サレタ必ズシモ連續デナイ character ノ全体ヲ G^{**} トスル。G^{**} ハGヲ discrete group 考ヘタトキノ G ノ character group デアル。

G^{**} ト $\overline{G}^*$ (G^* ノ compactified group) トガ實ハ同ジモノデアルコトヲ示サウ。コノタメニ G^{**} ノ topology ヲ考ヘル。コレハ明カニ

$$(14)\quad W_\beta(g_0^{**})=\{g^{**}\,|\,|(a_i,g^{**})-(a_i,g_0^{**})|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n\}$$

$$\beta=\{a_1,\cdots\cdots,a_n;\varepsilon\},\ a_i\in G,\ i=1,\cdots\cdots,n$$

ナル近傍系ニヨッテ與ヘラレル。コレト (13) トヲ比較スレバ G^* ヲ compactify シテ $\overline{G}^*$ ヲ得ルトキノ G^* ノ uniform topology ハ G^* ヲ G^{**} ノ subgroup ト考ヘタトキニ G^{**} ノ topology ニヨッテ G^* ノ上ニ induce サレル relative topology ト equivalent デアルコトガ分ル。

ヨッテ結局 $\overline{G}^*$ ハ G^{**} ノ中デノ G^* ノ closure ニ過ギナイコトヲ知ル。ヨッテ又 $\overline{G}^*$ ハ G^{**} ノ closed subgroup デアル。

次ニ $\overline{G}^*=G^{**}$ ナルコトヲ示スタメニ $\overline{G}^*$ ガ G^{**} ノ proper subgroup デアルトセヨ。然ルトキハ $\overline{G}^*$ ノ

上ニテ identically 1 デアッテ G^{**} ノ上デハ identically 1 デナイヤウナ G^{**} ノ continuous character ガ存在スル筈デアル。然ルニ G^{**} ノ continuous character モ G^{*} ノ continuous character モ共ニ G ノ element ニヨッテ與ヘラレテキルカラ此ノ様ナコトハ起リ得ナイ。

ヨッテ結局

定理3　G ノ charcter group G^{*} ノ compactified group $\overline{G}^{*}$ ハ G ヲ discrete group ト考ヘタトキノ G ノ character group G^{**} ト同ジモノデアル。

ヲ得ル。更ニ定理2ト定理3トヲ組合ハセレバ次ノ定理ヲ得ル。

定理4　normed ring $\mathfrak{R}$ ノ maximal ideal M ト G ノ必ズシモ continuous デハナイ character $\chi(a)$ トノ間ニ one-to-one correspondence ガ次ノ様ニツク：

$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ maximal ideal M ニ對シテ $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/M$ ナル homomorphism ヲ φ_M トスレバ $a \to \varphi_M(U_a) = \chi_M(a)$ ハ group G ノ必ズシモ continuous デハナイ character デアリ、逆ニ任意ノ G ノ必ズシモ continuous デハナイ character $\chi(a)$ ニ對シテ $\chi_M(a) = \chi(a)$ トナル如キ $\mathfrak{R}$ ノ maximal ideal Mガ存在スル。

コレデ最初ニ述ベタ結局ガ証明サレタワケデアル。更ニ上ノ証明ニヨッテ同時ニ次ノコトモ示サレタワケデアル：

$\boxed{\text{定理5}}$ Gノ任意ノ必ズシモ continuous デナイ character $\chi(a)$ ト，任意ノ $a_1, \cdots\cdots, a_n \in G$ 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテGノ continuous character $\chi'(a)$ ガ存在シテ

$$(15) \quad |\chi(a_i) - \chi'(a_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots\cdots, n$$

トナル。

此ノ定理ハ simultaneous approximation ニ関スル Kronecker-Weyl ノ定理ノ拡張ト見ルコトガ出来ル。

尚 上ノ証明ヨリ分カル如ク $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_{a_i}$ ナル形ノ bounded linear operator Aノ norm $|||A|||$ ハ locally compact ナ group Gノ algebraic ナ性質（即チ $a_1, \cdots\cdots, a_n$ 間ノ algebraic relation）及ビ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ ノミニ depend スルモノデアッテ、Gヲ locally compact ニスル如キ topology ノ入レ方ニハ無関係デアル。依ッテ例ヘバGヲ discrete ト考ヘタトキノ Aノ norm ヲ考ヘレバヨイノデアル。