1118. 或ル二ツノ積分不等式ニ就イテ

泰木　博（神戸高等商船學校）

コヽデ、次ノ二ツノ積分不等式ガ成リ立ツコトヲ証明シヨウ。

但シ $b > a$ デ $f(x)$ ハ區間 $a \leqq x \leqq b$ デ，此回連續微

条可能ナリトスル。

(1) $$\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx \geqq \frac{1}{b-a}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]^2$$

(2) $$\int_a^b x^2\left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx$$

$$\geqq \frac{1}{b-a}\left[bf^{(n-1)}(b)-af^{(n-1)}(a)-f^{(n-2)}(b)+f^{(n-2)}(a)\right]^2$$

(1) ノ証明

λヲ實數トシ，積分$\int_a^b \left[f^{(n)}(x)+\lambda\right]^2 dx$ ヲ考ヘレバ

$$\int_a^b \left[f^{(n)}(x)+\lambda\right]^2 dx$$

$$=\int_a^b \lambda^2 dx+2\int_a^b \lambda f^{(n)}(x)\,dx+\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx$$

$$=(b-a)\lambda^2+2\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]\lambda+\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx$$

上式ハ實數λノ如何ニ拘ラズ$\geqq 0$ナル故

$$\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]^2-(b-a)\int_a^b \left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx \leqq 0$$

之ヨリ(1)ヲ得ル。

(2) ノ証明

前ト同様ニシテ

$$\int_a^b \left[x f^{(n)}(x) + \lambda\right]^2 dx$$

$$= (b-a)\lambda^2 + 2\left[\int_a^b x f^{(n)}(x)\, dx\right]\lambda + \int_a^b x^2 \left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx$$

トコロガ，部分積分法ニヨリ

$$\int_a^b x f^{(n)}(x)\, dx = \left[x f^{(n-1)}(x)\right]_a^b - \int_a^b f^{(n-1)}(x)\, dx$$

$$= b f^{(n-1)}(b) - a f^{(n-1)}(a) - f^{(n-2)}(b) + f^{(n-2)}(a)$$

ナル故、前ト同様ニ λ ノ如何ニ拘ラズ $\geqq 0$ ナルコトカラ不等式 (2) ヲ得ル。

——（完）——