1116. Invariante Masse III

中野 秀五郎

§7. 準測度

定理5ハ定理2ノ拡張デハアリマスが 所謂 locally bicompact ノトキノ Haar measure ノ存在ハ直チニハ誘出スル譯ニ参リマセン。故ニ以下コノ問題ヲ考ヘテ見マセウ。

R ヲ locally bicompact トス. regularly open U ニシテ其ノ closure $\overline{U}$ が bicompact ナルモノヲ<u>近傍</u>ト云フコトニシマス。

<u>定義2.</u> R ノ<u>スベテノ</u>近傍 U ノ函数 $Q(U)$ が次ノ條件ヲ満足スルトキ<u>準測度</u>ト云フコトニシマス。

1) $0 \leqq Q(U) \leqq +\infty$, $\quad Q(0) = 0$

2) $U_1 \subset U_2$ ナラバ $\quad Q(U_1) \leqq Q(U_2)$

3) $Q(U_1 \oplus U_2) \leqq Q(U_1) + Q(U_2)$

$\quad$ ($U_1 \oplus U_2$ ハ $\overline{U_1 + U_2}$ ノ offener Kern)

準測度ニ定義1ノ如クニ weak topology ヲ入レマスト，豫備定理1ト同様ニシテ次ノ定理が証明出来マス。

<u>豫備定理4. 一ツノ近傍 U_0 ($\neq 0$) ニ對シテ $Q(U_0) = 1$ ナル準測度全体ハ bicompact デアリマス。</u>

$\mathfrak{N}$ ヲ近傍ノ集合デ

$$\mathfrak{N} \ni U,\ U \supset V \text{ ナラバ } \mathfrak{N} \ni V$$

ナルモノトシマス。

定義 3. 準測度 Q ト近傍ノ集合 $\mathfrak{N}$ トアリテ、若シモ

$$UQ' \neq 0 \text{ ナラバ } Q'V = 0 \qquad (Q' \in \mathfrak{N})$$

ヲ満タス U, V ニ對シテ常ニ

$$Q(U \oplus V) = Q(U) + Q(V)$$

デアルトキ, Q ハ mod $\mathfrak{N}$ デ加的デアルト云フコトゝシマス。

然ルトキハ明カニ Q ガ mod $\mathfrak{N}$ デ加的. 又 $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_1$ ナラバ, 又 Q ハ mod $\mathfrak{N}_1$ デ加的デアリマス。又簡單ニ次ノ定理ガ証明出來マス。

豫備定理 5. mod $\mathfrak{N}$ デ加的ナ準測度ノ全体ハ bicompact デアリマス。

豫備定理 6. R ノ連続変換 T デ invariant ナ準測度ノ全体ハ bicompact デアリマス。

§8. 定理 2 ノ擴張

定理 6. R ヲ locally bicompact. $\mathfrak{F}$ ヲ変換群デ次ノ條件ヲ満タス点 x_0 ガアルトシマス。

1) 任意ノ点 x 及ビ其ノ近傍 U ニ對シテ, x_0 ノ近傍 V_0 及ビ x ノ近傍 V ヲ適當ニ與ヘレバ $T \in \mathfrak{F}$ ニ対シ

$V(TV_0) \neq 0$ ナラバ常ニ $TV_0 \subset V$

2) x_0 ノ任意ノ近傍 U ニ對シ、TU ($T \in \mathfrak{F}$) ノ全体デ R ヲ cover スルコトガ出来ル。

然ルトキハ近傍 U_0 ニ対シ $mU_0 = 1$ ナル invariant measure ガ存在シマス。

証明. x_0 ノ近傍 U ニ對シ $TU \supset V$ ($T \in \mathfrak{F}$) ナル V ノ全体ヲ $\mathfrak{A}_U$ トシマスト, mod $\mathfrak{A}_U$ デ加的. $Q(U_0) = 1$. 然カモ $\mathfrak{F}$ デ invariat ナ準測度 Q ノ全体ヲ $\mathfrak{P}_U$ トシマスト、豫備定理 4.5, 6 ニヨリ $\mathfrak{P}_U$ ハ bicompact デアリマス。然カモ其ノ有限個 $\mathfrak{P}_{U_1}$, ..., $\mathfrak{P}_{U_n}$ ハ必ズ共有点ガアリマス。如何トナレバ $U \subset U_1 \cdots\cdots U_n$ ナル x_0 ノ近傍 U ニ對シテ Haar ノ如ク

$$Q(V) = \frac{\bar{V}\ \text{ヲ cover スル}\ TU\ \text{ノ最小個数}}{\bar{U}_0\ \text{ヲ cover スル}\ TU\ \text{ノ最小個数}}$$

トオケバ準測度 Q ハ mod $\mathfrak{A}_U$ デ加的、従ッテ mod $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots\dots, n$) デ加的デアリマス。又明カニ $\mathfrak{F}$ ニテ Invariant デアリマス。

$\mathfrak{P}_U$ ノスベテノ U ニ対スル共通部分ガ従ッテ存在シマスカラ、其ノ一ツヲ m トスレバ任意ノ V_1, V_2 ニ對シ $\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = 0$ ナレバ

$$m(V_1 \oplus V_2) = mV_1 + mV_2$$

デアリマス。如何トナレバ, $\bar{V}_1$ ハ

$\bar{V}_1$ ノ有限個ノ点 $x_1, \dots\dots, x_n$ 及ビソノ近傍 $U_1, \cdots$

----，$\mathfrak{U}_n$ ニテ cover サレ，然カモ $\overline{\mathfrak{U}}_i\overline{\mathfrak{V}}_2=0$ ナラシメラレマス。

假定ノ 1) ニヨリ、x_0 ノ近傍 $\mathfrak{U}$ ヲ適當ニ定メレバ、$\overline{\mathfrak{U}}_i\mathfrak{U}\neq 0$ ナレバ，$\mathfrak{U}\overline{\mathfrak{V}}_2=0$ ナラシメラレマス。m ハ $\mathfrak{N}_{\mathfrak{U}}$ ニ含マレマスカラ mod $\mathfrak{N}_{\mathfrak{U}}$ デ加的從ッテ上ノ等式ガ成立致シマス。

次ニ任意ノ点 x 及ビ其ノ近傍 $\mathfrak{V}_0$ ニ對シ $x\in\mathfrak{V}_1\subset\mathfrak{V}_0$ ニシテ

$$m\mathfrak{V}_1=\sup_{\mathfrak{V}_1\supset\overline{\mathfrak{U}}} m\,\mathfrak{U}$$

ナル近傍 $\mathfrak{V}_1$ ノ存在スルコトガ容易ニ証明出来マス。（著者 Topologische Masse 参照）．此ノ如キ $\mathfrak{V}_1$ ノ全体ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ m ハ $\mathfrak{G}$ ヲ Grundsystem トスル topologisches Masse トナリマス。然カモ $m\overline{\mathfrak{U}}_0=1$ ニテ $\mathfrak{F}$ ニ關シテ invariant ナルコトハ明カデアリマス。又 $m\,\mathfrak{U}<\infty$ ナルコトハ $\mathfrak{U}$ ガ $T\mathfrak{U}_0$ ノ有限個デ cover サレルコトヨリ明カデアリマス。

<u>定理 6 ニ於テ、1) ノ x_0 ヲ任意トスレバ、2) ニ於テハ、$T\mathfrak{U}_1$ ($T\in\mathfrak{F}$) ガ $\mathfrak{R}$ ヲ cover スル $\mathfrak{U}_1$ ガ少クトモ一ツ存在スレバ充分デアリマス</u>。如何トナレバ，$\overline{\mathfrak{U}}_1\ni x$ ナル任意ノ点 x ニ對シ、Tx ($T\in\mathfrak{F}$) ノ closure ヲ Ax トスレバ、Ax ハ closed 且ツ $\mathfrak{F}$ デ invariant デアリマス。

故ニ此ノ如キ A_x ノ Durchschnitt トシヲ invariant closed ナ R ニシテ、R ヲ x ナル任意ノ x ニ対シ、Tx ($T \in \mathfrak{F}$) ノ closure ガヤハリ R トナリマス。故ニ R ヲ x_0 ナル一点ハ relative space R ニテ定理6ノ1) ノ x_0 ノ役ヲ致シマス。故ニ R ノ上ニ invariant measure m ガアリマス。$R\mathfrak{U} = 0$ ナル $\mathfrak{U}$ ニ對シテ、$m\mathfrak{U} = 0$ トスレバ、此ノ m ガ $\mathcal{R}$ デノ invariant measure トナリマス。

——18. 3. 15.——

(西大 ＝ 三六八)