115. Invariante Masse II

中野秀五郎

§4. 單一性

定理2ニ於テ如何ナル場合ニ Invariante Masse ガ unique ニナルカヲ考ヘテ見ル。§3ノ証明ヨリ明カナヤウニ，任意ノPニ對シ

$$(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n)P$$

$$(T_i \in \mathfrak{T},\ \alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_n = 1,\ \alpha_i \geqq 0)$$

ノ limiting point トシテ Invariante Functional P_0 ガ得ラレ、然カモ P_0 ノ任意ノ近傍間ニ正数 ε ニ対シテ $0 \leqq f \leqq 1$ ヲ與ヘレバ

$$(1)\quad \underset{T \in \mathfrak{T}}{\mathrm{Schw}}\ (\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n)P(fT) < \varepsilon$$

ナル $(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n)P$ ガ存在スル．今 $\mathfrak{R}$ ノ一点 x_0 ニ對シテ

$$P(f) = f(x_0)$$

ナルPヲトレバ，(1) ハ

$$(2)\quad \underset{T \in \mathfrak{T}}{\mathrm{Schw}} \{\alpha_1 f(T_1 T x_0) + \cdots\cdots + \alpha_n f(T_n T x_0)\} < \varepsilon$$

トナル。故ニ Tx_0 ガスベテノ T ニ対シテ $\mathfrak{R}$ ノ中ヲ dense ニ動クナレバ (2) ヨリ

$$\alpha_1 f(T_1 x) + \cdots\cdots + \alpha_n f(T_n x) < \varepsilon \qquad (x \in \mathfrak{R})$$

トナル。故ニ任意ノ f ニ對シテ $(0 \leqq f \leqq 1)$

$$P_0(f)+\varepsilon \leqq \alpha_1 f(T_1 x)+\cdots\cdots+\alpha_n f(T_n x)$$
$$\leqq P_0(f)+\varepsilon$$

ナル $\alpha_1 T_1+\cdots\cdots+\alpha_n T_n$ ガ存在スル。今 Q ヲ他ノ invariant functional トスレバ，此式カラ

$$P_0(f)+\varepsilon \leqq Q(f) \leqq P_0(f)+\varepsilon$$

從ツテ $Q(f)=P_0(f)$ トナル。故ニ次ノ定理ガ成立ス。

定理 3　$\mathfrak{R}$ ヲ bicompact，$\mathfrak{Y}$ ヲ transformation group トシマス。若シモ

1)　$\{f(Tx)\}$，$(T \in \mathfrak{Y})$ ガ gleichartig stetig

2)　$\{Tx_0\}$ $(T \in \mathfrak{Y})$ ガ $\mathfrak{R}$ デ dense ナル様ナ $x_0 \in \mathfrak{R}$ ガ存在スレバ $\mathfrak{Y}$ ニ關シテ invariant measure ガ唯一ツ存在スル。

此ノ定理ニ於ケル條件 1) ハ次ノ topological ナ條件デ置換ヘラレルコトヲ注意シマス。

1')　$x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$ ($x_1=x_2$ ノ場合モ含ム)，$U(x_1)$ ヲ任意ノ x_1 ノ近傍トシタトキ，x_1, x_2 ノ近傍 V_1, V_2 ヲ適當ニ定メレバ，スベテノ $T \in \mathfrak{Y}$ ニ對シテ

$$V_1(TV_2) \neq 0 \quad ナラバ \quad TV_2 \subset V$$

トナル。

Invariant measure ノ uniqueness ハ

Ergodentheorie ニ重要ナ関係ガアリマス。

例ヘバ，P_0 ガ unique ナレバスベテノ $x \in R$ ニ對シテ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x)+f(Tx)+\cdots\cdots+f(T^{n-1}x)}{n} = P_0(f)$$

トナリマス。コレニ就テハ後ニ書クコトトシマス。

§5. 殆週期函數

Neumann ノ almost periodic Funktion ノ Mean ノ存在ヲ定理2カラ証明シマセウ。

此処デハ almost periodic Funktion ヲ幾分拡張シテ定義シマス。即チ

R ヲ topological space，$\mathfrak{T}$ ヲ R ノ変換群，R ノ連続函数 $f(x)$ デ $\{f(Tx)\}$ $(T \in \mathfrak{T})$ ガ uniform metric

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

ニ関シテ total beschränkt ノ時 $f(x)$ ヲ $\mathfrak{T}$ ニ関スル殆週期函數ト定義シマス。

然ルトキハ §3 ノ証明ヨリ明カナヤウニ総テノ殆週期函數 f ニ対シテ

$$M(fT) = M(f), \quad M(1) = 1$$

ナル positive linear functional M ガ存在スル。

然シモ定理3ノ2)ヲ満足シテキレバ unique デアリマス。

定理2デ $\mathfrak{R}$ ヲ bicompact トシテアルノハ P_0 ヨリ measure ヲ誘出スルノト定理3ノ1)カラ $\{f(Tx)\}$ ガ total beschränkt ナルコトヲ証明スルノニダケ必要ナノデ、其ノ他ハ全ク topology ガ不要ナノデス。然シ topology ヲ入レテ考ヘタ方ガ尚一層一般ナノデアリマス。又 $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デナクトモ、拡大シテ bicompact ニシテ考ヘテモヨイコトデスカラ、其点カラ見レバ bicompact ノ場合ガ一般カモ知レマセン。

§6 locally bicompact ノ場合

定理1及ビ2ニ於テモ§5ニ述ベタルヤウニ $\mathfrak{R}$ ガ bicompact ト云フコトハ本質的デハアリマセン。然シコノ場合デモ得ラレル invariant measure ハ何時モ $m(\mathfrak{R})=1$ デアリマス。此処デハ $m(\mathfrak{R})=+\infty$ ノ場合ヲ考ヘテ見マセウ。其ノタメニハ豫備定理ノヲ少シ拡大シナケレバナリマセン。

$\mathfrak{M}$ ヲ semi-ordered linear space トシマス。今 $\mathfrak{M}$ ノ Functional P デ次ノ如キモノヲ考ヘマス。

$$0 \leqq P(a) \leqq \infty \quad (a \geqq 0) \quad P(0)=0$$

$$P(\alpha a+\beta b)=\alpha P(a)+\beta P(b)$$
$$(\alpha,\ \beta\geqq 0)$$

此ノ如キPノ全体ヲ $\mathfrak{P}$ トシマス。P_0 ノ近傍ヲ

$$|P(a_i)-P_0(a_i)|<\varepsilon \qquad (P_0(a_i)<+\infty \text{ ナレバ})$$
$$P(a_i)>\frac{1}{\varepsilon} \qquad (P_0(a_i)=+\infty \text{ ナレバ})$$
$$a_i\geqq 0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n$$

ナルPトシマス。然ルトキハ

豫備定理2. $\mathfrak{P}$ ハ bicompact Hausdroff space デアリマス。

次ニ locally bicompact space R ノ上ノ measure m ニツイテノ注意ヲ述ベマセウ。

f ヲ R ノ上デ連續ニシテ $E[x:|f(x)|>0]$ ノ closure ガ bicompact ナ函數 f ノ全体トシマス。然ルトキハ

豫備定理3. f ノ positive linear Funktional P ト R ノ上ノ measure m ト一對一ニ

$$P(f)=\int_R f\,dm$$

ナルヤウニ對應セシメラレル。

§2 ノ証明カラ直チニ次ノ定理ガ得ラレマス。

定理4. R ガ locally bicompact ナル場合.

次ノ如キP及ビ $e\in\mathfrak{F}$ ($e>0$) ガ存在スレバ

即チ

$$(*)\quad 0<\alpha<\frac{P(eT)}{P(e)}<\beta \qquad (T\in\mathfrak{G})$$

ナレバ, $\mathfrak{G}$ ガ abelian ノ時ハ, 常ニ

$$P_0(e)=1,\quad P_0(fT)=P_0(f)$$

ナル P_0 ガ存在スル。

(*) ハ topological ニ次ノ條件デ置換ヘルコトガ出来マス。

(**) $\mathfrak{R}$ ノ上ニ点集合 S ト open set U ガ存在シテ, $\bar{U}$ ハ bicompact 且ツ TU ($T\in\mathfrak{G}$) ト S トハ必ズ共通点ガアッテ其ノ個数ハ有界デアル。

又§3ヨリ定理2ノ拡張トシテ

定理5. (*)ヲ満足スル P, e ガ存在シ、且ツ P(fT) ガTノ函数トシテ概週期函数ナルトキハ $P_0(e)=1$, $P_0(fT)=P_0(f)$ ナル P_0 ガ存在スル。

— 18. 3. 12 —