1112. 代數曲線ノ Uniformisation ニツイテ (II)

有馬 喜八郎 (阪大)

第二章

第一章ニ於テ Ahlfors ノ Schwarz Lemma ヲ利用シテ Uniformisation 問題ヲ取扱ヒマシタガ，コノ章以下デハ Nevanlinna 流ノ理論ニツキカイテミタイト思ヒマス。

(1) $F(x, y)=0$ ハ x ニツキ n 次，y ニツキテ m 次ノ代數方程式トシソノ Riemann 面ヲ R トシマス。又 Geschlecht ヲ p トシマス ($p \geqq 0$)

R ノ normal ナ第三種積分

$$J(z, z_0, \alpha, \beta)=\int_{z_0(x_0, y_0)}^{z(x, y)} R(x, y)\, dx$$

α, β ヲ logarithmic ナ singular point トシテモツ

$\alpha(a, a')$ ガ k 次ノ分岐点ナラバ，α ニテ

$$\frac{1}{k} \log \frac{1}{x-a} + \text{有界ナ函數}$$

$\beta(b, b')$ ガ k' 次ノ分岐点ナラバ，β ニテ

$$\frac{1}{k'} \log (x-b) + \text{有界ナ函數}$$

$J(z, z_0, \alpha\, \beta)$ ノ實數部分ヲ $G(z, z_0, \alpha, \beta)$ トスレバ α,

β ニテ夫々上述ノ如キ性質ヲ有シ他ニテ調和ナ函數トナル。

(2) $x=f(t)$, $y=g(t)$ ハ $|t|<R$ ニテ有理型函數デ $F[x(t), y(t)]\equiv 0$ トス。

$$G(z(f(t), g(t))z_0; \alpha, \beta)=G(t) \text{ トス.}$$

$\alpha(a, a')$ ニ於テ

$$y-\alpha=a_\ell(x-a)^{\frac{\ell}{k}}+\cdots\cdots$$

トス.

$$\overline{m}(r, \alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|^{\frac{1}{k}}+|g(re^{i\theta})-\alpha|^{\frac{1}{\ell}}}d\theta$$

$$r\leq R$$

$t=t_0$ ニテ

$$f(t)-a=A(t-t_0)^{k\bar{n}}+\cdots\cdots$$

$$g(t)-a'=B(t-t_0)^{\ell\bar{n}}+\cdots\cdots$$

ナルトキ t_0 ニテ $\bar{n}$ 回ト算へ, $|t_0|<r$ ナルスベテニツキ計算シタ總計ヲ $\bar{n}(r, \alpha)$ トス

然ルトキ普通ノ場合ノ $\log\frac{1}{|f-a|}$ ノカハリニ上述ノ $G(t)$ ヲ利用シテ Green-Gauss ノ公式ヨリ

$$\overline{m}(r, \alpha)+\int_{r_0}^{r}\frac{\bar{n}(r, \alpha)}{r}dr=m(r, \beta)+\int_{r_0}^{r}\frac{\bar{n}(r, \beta)}{r}dr+O(1)$$

$\displaystyle\int_0^r\frac{\bar{n}(r, \alpha)}{r}dr=N(r, \alpha)$ トスレバ

$$\overline{m}(r,\alpha)+\overline{N}(r,\alpha)=\overline{m}(r,\beta)+\overline{N}(r,\beta)+O(1)$$

$\overline{T}(r,\alpha)=\overline{m}(r,\alpha)+\overline{N}(r,\alpha)$ トスレバ

（第一基本定理）

$$\overline{T}(r,\alpha)=\overline{T}(r,\beta)+O(1)$$

(3)

$T\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$，$T\left(r,\dfrac{1}{g-a'}\right)$ ト $\overline{T}(r,\alpha)$ ノ関係式ヲ考

ヘマス。

$x=a$ ナル点ヲ

$$\alpha_1(a,b),\ \alpha_2(a,b_2)\text{------}$$

トシ，ソノ分岐数ヲ $k_1,k_2,$ ------- トス。

$$\sum k_i=m$$

然ルトキ

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\sum k_i\overline{T}(r,\alpha_i)+O(1)$$

第一基本定理ヨリ $\alpha(a,a')=\alpha_1(a,b_1)$ 即チ $a'=b_1$ ト

スレバ

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\overline{T}(r,\alpha)\sum k_i+O(1)$$

$$=m\overline{T}(r,\alpha)+O(1)$$

依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理 1。

$$\overline{T}(r,\alpha)=\frac{1}{m}T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+O(1)=\frac{1}{m}T(r,f)+O(1)\text{-----}$$

同様ニシテ

$$\overline{T}(r,\alpha)=\frac{1}{n}T\left(r,\frac{1}{g-a'}\right)+O(1)=\frac{1}{n}T(r,g)+O(1)\ \cdots\cdots$$

従ッテ又上式ヨリ

$$\frac{1}{m}T(r,f)=\frac{1}{n}T(r,g)+O(1)\ \cdots\cdots\cdots$$

(注意) Nevanlinna ノトキハ $x=f(t)$, $y=f(t)$

トスレバ $F(x,y)=x-y=0$ トシ, $\alpha(a,a)$ トスレバ

$$\overline{T}(r,\alpha)=T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$$

トナル。

(4)

Nevanlinna ノ理論デ

$$T(r,f)=T\left(\frac{cf+d}{af+b}\right)+O(1)\qquad a,b,c,d\text{ハ常数}$$

コレヲ $T(r,f)$ ハ一次変換ニヨリ不変デアルト云フコトニシマスト

$\overline{T}(r,\alpha)$ ニツイテ如何ナルコトガ云ヘルデセウカ。

$\overline{T}(r,\alpha)$ ハ $F(x,y)=0$ ノ briational transformation ニヨリ不変デアルコトガ云ヘマス。以下コレニツイテ考ヘマス。

$F(x,y)=0$ ノ Riemann 面ヲ R_F ト書クコトニシマス。

$F(x,y)=0$ ハ x ニツイテ n 次, y ニツイテ m 次ノ irreductible ナ代数方程式トシ

$$X=\varphi(x,y),\quad Y=\psi(x,y)\ \cdots\cdots\ (A)$$

ナル変換ヲ考ヘル。

但シ $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ハ夫々 μ 次, ν 次ノ有理函数トス. 即チ R_F ノ上ニ於テ異ナル μ 個, ν 個ノ Pole ヲ有スルモノトス。

(A) ト $F(x, y) = 0$ ヨリ, x, y ヲ消去スレバ

$$G(X, Y) = 0 \text{ ------- (B)}$$

ナル代数曲線ニナル。 X ニツイテハ ν 次, Y ニツキ μ 次トナル。

逆ニ (A), (B) ヨリ

$$x = \Phi(X, Y)$$
$$y = \Psi(X, Y)$$

ナル如ク, x, y ハ X, Y ノ有理函数ニテ表ハサル。

$G(X, Y) = 0$ ノ Riemann 面ヲ R_G トス。

以下数段ニ分ケテ $T(\gamma, \lambda)$ ノ birational transformation ニヨル不変性ヲ証明シマス。

1°

(I) $X = \varphi(x, y)$ ハ R_F ノ分岐点デナイ異ナル μ 個ノ点デ一次ノ無限大ニナル。

(II) R_F ハ無限遠点ニ分岐点ヲモタズ且ツ x ノ ∞ ニ対シ X ノ m 個ノ値ハ

$$X_i = A_0^i + A_1^i \frac{1}{x} + \text{-----} \qquad i = 1, 2, \text{-----} m$$

$$\text{但シ } A_1^i \neq 0$$

(I), (II) ノ仮定ヲナスモ一般性ヲ失ハナイコトヲ証明シマ

ス。

(I) ノ假定ニツイテ (I) ノ假定ガ成立セズトスレバ次ノ如ク考フ。

$$\varphi(x, y) = X_0$$

ガ無限点トモ亦分岐点トモ相異ナル μ 個ノ根 $\alpha_1(a_1, b_1)$, $\alpha_2(a_2, b_2) \cdots\cdots \alpha_\mu(a_\mu, b_\mu)$ ノ simple ノ根ヲ有スルモノトス。

$X' = \dfrac{1}{X - X_0}$ トオキ (X, Y) ノ Riemann 面 R_G ト (X', Y) ノ Riemann 面 R_G ヲ考ヘレバ，放散分岐点ノ分岐数ハ不変ナリ。

今 $x = f(t)$, $y = g(t)$, $F(x, y) = 0$ ノトキ $\overline{T}(r, \alpha)$ ヲ他ノ場合ト區別スル為メ $\overline{T}(r, f\overline{F}, \alpha)$ ト記スコトニス。

$x = f(t)$, $y = g(t)$ ヲ $\varphi(x, y)$ ニ代入シ

$$X(t) = \varphi[f(t), g(t)] = \overline{F}(t)$$

トス．コノ transformation ニヨリ α ハ R_G 上ノ点 $\mathfrak{A}$ ニ移ッタトス。

定理 (I) ヨリ

$$\overline{T}(r, \overline{F}, G, \mathfrak{A}) = \frac{1}{\mu} T(r, \overline{F}) + O(1)$$

又

$$X'(t) = \frac{1}{X(t) - X_0} = \frac{1}{\overline{F}(t) - X} = \overline{\overline{F}}(t)$$

トス。

コレニ $\mathfrak{a}$ ハ $R_{G'}$ 上ノ $\mathfrak{a}'$ ニ変ツタトスレバ

$$\overline{T}(r, \overline{\overline{F}}, G', \mathfrak{a}') = \frac{1}{\mu} T(r, \overline{F}) + O(1)$$

$\overline{\overline{F}}(t) = \dfrac{1}{\overline{F}(t) - X_0}$ ナル故

$$T(r, \overline{F}) = T(r, \overline{\overline{F}}) + O(1)$$

$$\therefore \quad \overline{T}(r, \overline{F}, G, \mathfrak{a}) = \overline{T}(r, \overline{\overline{F}}, G', \mathfrak{a}') + O(1)$$

故ニ（I）ナル假定ヲナスモ，不変性ニ影響ナシ

（II）ノ假定ニツイテ

x_0 ハ x_0 ニ對應スル m 個ノ y ノ値ハ有限デ異ナリ，又夫々ニ對スル $X = \varphi(x, y)$ ノ m 個ノ値モ有限デ異ナル如キ x ノ數値トス。

$$X_i = A_0^i + A_1^i (x - x_0) + \cdots\cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

$$\text{但シ} \quad A_1^i \neq 0$$

$x = x_0 + \dfrac{1}{x'}$ ナル変換ヲ施セバ所要ノ假定ガ成立ス。

ソノトキノ Riemann 面ヲ $R_{F'}$ トス。

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

ニ對シ $x' = \dfrac{1}{f(t) - x_0} = f'$, $y = g(t)$ ヲ考ヘル。

定理（1）ヨリ

$$\overline{T}(r, f, F, \alpha) = \frac{1}{m} T(r, f) + O(1)$$

α ガ α' ニ変ツタトスレバ

$$\overline{T}(r, f', F', \alpha') = \frac{1}{m} T(r, f') + O(1)$$

$$f'(t) = \frac{1}{f(t)-x_0}$$ ヨリ

$$T(r, f') = T(r, f) + O(1)$$

故ニ $$\overline{T}(r, f, F, \alpha) = \overline{T}(r, f', F', \alpha') + O(1)$$

トナリ，不変性ニ影響ナシ。

2°.

1° ヨリ (I), (II) ノ仮設ヲナスモ一般性ヲ失ハザルコトヲ証明セラレシ故，以後 (I), (II) ノ仮設ノモトニ議論ヲ進メルモノトシマス。

初メニ $\overline{m}(r, \alpha)$, $\overline{N}(r, \alpha)$ ニツイテ注意ヲナシ，ソレニツイテ論スルコトニシマス。

$\alpha(a, a')$ ニ於テ

$$y - a' = a_l (x-a)^{\frac{l}{k}} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad |y-a'|^{\frac{1}{l}} = |x-a|^{\frac{1}{k}} \cdot S(x)$$

$S(x)$ ハ有界ナ函数トス。

故ニ

$$|g(re^{i\theta})-a'|^{\frac{1}{l}} = |h(re^{i\theta})-a|^{\frac{1}{k}} S(r, e^{i\theta})$$

$$\therefore \quad \overline{m}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|^{\frac{1}{k}} + |h(re^{i\theta})-a'|^{\frac{1}{l}}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\theta + O(1)$$

故ニ

$$\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\, d\theta - \overline{\overline{m}}(r, f, \alpha)$$

トスレバ

$$\overline{T}(r, \alpha) = \overline{\overline{m}}(r, f, \alpha) + \overline{N}(r, \alpha) + O(1)$$

故ニ $\overline{m}(r, \alpha)$ ノ代リ $\overline{\overline{m}}(r, f, \alpha)$ ヲ考ヘル。

(A) R_G ノ無限点ニツイテ考ヘル。

假定 (I) ニヨリコレニハ μ 個ノ単純極 $\alpha_1(a_1, b_1) \cdots\cdots \alpha_\mu(a_\mu, b_\mu)$ ガ對應ス。

$\alpha_i(a, b_i)$ ノ近傍ニテハ

$$X = \frac{R_i}{x-a_i} + C_0 + C_1(x-a_i) + \cdots\cdots \quad (1) \qquad R_i \neq 0$$

inversion ニヨリ　$x-a_i = P\left(\frac{1}{X}\right)$

但シ P ニハ $\frac{1}{X}=0$ ニテ正則ナ函数

$\alpha_i(a_i, b_i)$ ハ分岐点デナイカラ $y-b_i$ ハ $x-a_i$ ノ正則ナ函数，故ニ $\frac{1}{X}=0$ ノ近傍デ $\frac{1}{X}$ ノ正則ナ函数トナル

故ニ $Y=\psi(x, y)$ ハ $\frac{1}{X}=0$ 従ッテ $X=\infty$ デ uniform ナ函数トナリ，R_G ノ無限点ハ分岐点デハナイ。

故ニ上ノ注意ト (1) 式ヨリ α_i ノ對應点ヲ A_i トスレバ

$$\overline{T}(r, f, F\, \alpha_i) = \overline{T}(r, \overline{F}, G, A_i) + O(1)$$

ナルコトヲ知ル。

(B) R_F ノ無限点ニハ假定 (II) ヨリ

R_F ノ無限点ニテ

$$X = A_0 + \frac{A_1^i}{x} + \cdots\cdots \qquad (2) \qquad A_1^i \neq 0$$

inversion ニヨリ

$$\frac{1}{x} = P(X - A_0^i)$$

R_F ノ無限点ハ分岐点デナイカラ，従ッテ

$$y = Q(X - A_0^i)$$

$$\therefore \quad Y = \psi(x, y) \Rightarrow R(X - A_0^i)$$

$P(X - A_0^i)$, $Q(X - A_0^i)$, $R(X - A_0^i)$ ハ *uniform* ナ函数デアルコノ R_F ノ無限遠点 α ノ對應点 A ハ分岐点デナイ。

故ニ (2) ヨリ容易ニ

$$\overline{T}(r, f, F, \alpha) = \overline{T}(r, \overline{F}, G, A) + O(1)$$

(C) 次ニ $\alpha_i(a_i, b_i)$ ガ R_F ノ上ノ分岐数 r_i ノ分岐点ノ場合

$$X = X_i + C_1^i (x - a_i)^{\frac{l_i}{r_i}} + \cdots\cdots \qquad C_1^i \neq 0$$

$$\therefore \quad (X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$$

$$= (x - a_i)^{\frac{1}{r_i}} \left[C_1^i + d_1 (x - a_i)^{\frac{1}{r_i}} \cdots\cdots \right]^{\frac{1}{l_i}} \cdots\cdots (3)$$

故ニ

$(x - a_i)^{\frac{1}{r_i}}$ ハ $(X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$ デ級数展開サル。従ッテ $y - b_i$ モ $(X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$ デ従ッテ $Y = \psi(x, y)$ モ $(X - X_i)^{\frac{1}{l_i}}$ デ展開可能デアル。

従ッテ $\alpha_i(a_i, b_i)$ ニ對應スル R_G 上ノ点 A_i ハ分岐數 l_i ノ分岐点トナル。*

(3) ヨリ

$$\frac{1}{2\pi l_i}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|\overline{F}(t)-X_i|}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r_i}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(t)-a_i|}\,d\theta+O(1)$$

又，$x-a_i=f(t)-a_i=(t-t_0)^{r_i n}[A+\cdots\cdots]$ $\quad A\neq 0$

トスレバ

$$(\overline{F}(t)-X_i)^{\frac{1}{l_i}}=(t-t_0)^n[C_1^i+\cdots]^{\frac{1}{l_i}}[A+\cdots\cdots]^{\frac{1}{r_i}}$$

$$\therefore\quad F(t)-X_i=(t-t_0)^{l_i^n}[C_1^i\cdots\cdots](A\cdots\cdots)^{\frac{l_i}{r_i}}$$

故ニ

$$\overline{N}(r,\alpha_i)=\overline{N}(r,A_i)$$

故ニ

$$\overline{T}(r,f,F\,\alpha_i)=\overline{T}(r,\overline{F},F\,A_i)+O(1)$$

(D) $\alpha(a,b)$ ガ R_F ノ分岐点デナイトキ

$\alpha(a,b)$ ニ對應スル R_G ノ点ヲ A トス。

$$X=X_0+A_n(x-a)^n+\cdots\cdots\qquad A_n\neq 0$$

モシ $n>1$ ナラバ $x-a$，ハ $(X-X_0)^{\frac{1}{n}}$ ニテ從ッテ $y-b$ モ從ッテ $Y=\psi(x,y)$ モ $(X-X_0)^{\frac{1}{n}}$ ニテ展開サレテ A ハ次ノ分岐点トナル。*

$$X-X_0=(x-a)^n[A_n+\cdots\cdots]\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) ヨリ

$$\frac{1}{2\pi n}\int \log^+ \frac{1}{\overline{F}(t)-X_0}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int \log^+\frac{1}{|f(t)-a|}\,dt+O(1)$$

$$\therefore\quad \overline{\overline{m}}(r,f,\alpha)=\overline{\overline{m}}(r,\overline{F},A)+O(1)$$

同様ニ

$$\overline{N}(r,f,\alpha)=\overline{N}(r,\overline{F},A)$$

$$\therefore\quad \overline{T}(r,f,F,\alpha)=\overline{T}(r,\overline{F},G,A)+O(1)$$

上ニテ完全ニ証明ヲ了ス.

(注意) (C), (D) ニ於ケル Y ノ展開式ニ於テ分数指数ガ消エルカ, 又ハ l_i, 又ハ n ヨリモ小サイ共通分母ヲ有スルコトハナイ。

例ヘバ (D) ノ場合ニ $\alpha(a,b)$ = 点 $A(X_0,Y_0)$ ガ對應スルトス。

今 A ヲ通ル Riemann 面ノ枚数ガ n 個ヨリ少クナイトス。

x ガ $R_{\overline{F}}$ ノ上デ α ノ廻リヲ一回マワレバ $X-X_0$ ハ $2n\pi$ ダケ偏角ガ増ス. 從ッテ X ト $A(X_0,Y_0)$ ヲ結ブ直線ハ cycle A ノ近傍ヲ一回以上マワル故ニ一對一ノ對應ヲナサズコレハ birational transformation ノ假設ニ反ス。

l_i ノトキモ全ク同様ナリ。

故ニ

定理(II) $\overline{T}(r;\alpha)$ ハ birational transformation ニヨリ不変ナリ。

(5) コノ§デハ geschlecht $p \geqq 2$ トス。

$F(x, y) = 0$ ハ第一章ノ條件ヲ滿足スルモノトス. $z(x, y)$ ヲ $(p, 0)$ ナル automorphic function トス。

$$\bar{u}(x) = \log \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|}{1-|z|^2}$$

トスレバ

$$\Delta_x \bar{u} = 4e^{2\bar{u}}$$

Riemann 面ノ無限点デハ $\bar{u}(x) = -2\log|x| +$ 有界函數, m 次ノ分岐点 (b, b') デハ $\bar{u}(x) = \frac{1-m}{m}\log|x-b|$ + 有界函數

$u(t) = \bar{u}(f(t))$ トスレバ $\Delta_t u(t)$

$$= \Delta_t \bar{u}[f(t)] = \Delta_x \bar{u}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2$$

今 Riemann 面ノ分岐点 α_i ノ分岐数ヲ m_i $(i=1, 2, \cdots\cdots k)$, 無限遠点ヲ β_i $(i=1, \cdots\cdots m)$ トス。

$\bar{u}[f(t)]$ ニ第一基本定理ノトキト同ジ準備ノモトニ Green-Gauss ノ公式ヲ用ヒ

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)T(r, \alpha_i) - 2\sum_{i=1}^{m}T(r, \beta_i) + O(1)$$

$$-\int_{r_0}^{r}\left[\frac{2}{\pi}\int e^{2\bar{u}}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dw\right]\frac{dr}{r}$$

但シ dw ハ面積要素トス.

第一基本定理ニヨリ Riemann 面上ノ任意ノ点ヲ α

トスレバ

$$\left[\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)-2m\right]\overline{T}(r,\alpha)+O(1)$$

$$=\int_{r_0}^{r}\left[\frac{2}{\pi}\int\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|^2\left|\frac{dx}{dt}\right|^2}{(1-|z|^2)^2}\,d\omega\right]\frac{dr}{r}$$

然ルニ

$$\sum(m_i-1)-2m=2p-2$$

$$\therefore\quad (2p-2)\overline{T}(r,\alpha)+O(1)=\int_{r_0}^{r}\frac{A(r)}{r}\,dr \text{ ------ } (1)$$

但シ　$A(r)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|^2\left|\frac{dx}{dt}\right|^2}{(1-|z|^2)^2}\,d\omega$

今 riemann 面 R_F ガ birational transformation ニヨリ R_G ニナッタモノトス。R_G ノ $(p,0)$ ノ automorphic function ヲ $z'(X,Y)$ トスレバ容易ニ $z=\dfrac{az'+b}{cz'+d}$（但シコノ一次分數式ハ單位円ヲ自身ニ移スモノナリ）ナル關係アルコトヲ知ル。

故ニ　$$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dz'|}{1-|z'|^2}.$$

故ニ $A(r)$ ハ birational transformation ニ對シ不変ナルコトヲ知ル。

又定理(II)ニヨリ $\overline{T}(r,\alpha)$ モ不変ナル故 birational transformation ニヨリ第一章ノ條件ヲ満足セシメ得ル故

定理III　geschlecht $p \geqq 2$ ナルトキ

$$(2p-2)\overline{T}(r,\alpha) = \int^{r} \frac{A(r)}{r} dr + O(1)$$

次ニ第一章ノ條件ヲ $F(x,y)=0$ ガ満足スルトキ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \left|\frac{dx}{dt}\right|^2}{1-|z|^2} \leqq \frac{R}{R^2-|t|^2}$$

コレヲ用ヒテ $t = re^{i\theta}$ トスレバ

$$A(r) \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{R^2 r dr d\theta}{(R^2-r^2)^2} = \frac{2r^2}{R^2-r^2}$$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{A(r)}{r} \leqq \int_0^r \frac{2r\,dr}{R^2-r^2} = \log\frac{R^2}{R^2-r^2} = \log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

故ニ定理(III)ヨリ

$$(2p-2)\overline{T}(r,\alpha) \leqq \log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

birational transformation ヲ施シテ考ヘレバ

定理IV　$\overline{T}(r,\alpha) \leqq \frac{1}{2p-2}\log\frac{1}{R-r} + O(1)$

定理I ニヨリ

$$\overline{T}(r,\alpha) = \frac{1}{m} T(r,f) + O(1)$$

故ニ

$$T(r,f) \leqq \frac{m}{2p-2}\log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

故ニ

定理V　$x = f(t)$, $y = g(t)$ ガ $|x| < R$ デ有理型

函数 $F(x, y)=0$ ハxニツキn次，yニツキm次ノ geschlecht p ($\geqq 2$) ナル代数曲線デ $F[f(t), g(t)]\equiv 0$ ナラバ

$$T(r, f) \leqq \frac{m}{2p-2} \log \frac{1}{R-r} + O(1)$$

$$T(r, g) \leqq \frac{n}{2p-2} \log \frac{1}{R-r} + O(1)$$

定理VI. 上ノ假設ノモトニ

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{R-r}} \leqq \frac{m}{2p-2}$$

系 I. $|t| \leqq R$ ニテノ有理型函数 $x=f(t)$, $y=g(t)$ が $f(x, y)=0$ ヲ uniformisation シテイルモノトス。モシ

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{R-r}} = \infty$$

ナレバ

$f(x, y)=0$ ノ geschlecht ハ 0 叉ハ 1 ナリ。

(注意) 系 I ハ円内有理型函数ノトキノ Picard ノ定理ニ相應シ，定理(III) ハ清水－Ahlfors ノ定理ニ對應スルモノト思ハレマス。

上ノ結果ハ次章ノ第二基本定理カラモ得ラレマス。

尚ホ

系2. *geschlecht* p ナルフックス函數ヲ $f(t)$ トスレバ

$$\overline{\lim} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{R-r}} \leqq K \qquad (K \text{ ハ } \mathit{finite})$$

但シ $p \geqq 2$

——（續ク）——

（西大 二三六八）