

# 1110. 半順序可換群ノ有界自己準同型ニツイテ

中山 正 (名大)

吉田氏トノ前談話ニオイテ *Vernikoff - Krein - Joubin* ノ半順序環ニツイテノ結果ガ環ト假定シナクト  $\in$  *operator domain* フモツ群トシテ出来ルコトヲ注意シマシタ (小生ガ間違ッタ証明ヲ書イタリシテ, スツカリ吉田氏ニ御迷惑ヲカケ, マタ汗顔, 至リガシクガ, 結果ハ前記ノゴトヲ成立シマス)。特ニ従ッテ *associativity* 等假定シナクトモヨイコトガ知レルワケマス。

シカシ訂正シタ証明ハドウモ  $V-K-T$  ノト大変似テキテ誠ニ不甲斐ナイ話シマスガ, シカシコノ環トシナイデ, *operator* フモツ云々トスルコトニヨッテ, 逆ニ半順序可換群ノ自己準同型ニツイテ一寸面白ク思ハレル事柄ガ出テ来マス。ソレヲ述ベテ見タイト思ヒマス。

④ 普通ノ様ニ半順序可換 (加法) 群トスル。タビシテ

ル自然数  $n = \text{對シ } nx \geq 0 \quad + \quad x \geq 0$

ヲ假定スル。  $A$  ヲソノ *Automorphism* (自己準同型) トスル (コト = 群算法ノミヲ問題ニシ, 順序ハタモタナ イデヨイトスル)。

而シテ

總テ、  $x \in G \geq 0 = \text{對シ } nx \geq x^A \geq -nx$  が成立ツヤウナ自然数  $n$  が存在スルトキ、  $A$  ハ 有界 ナ *autom.* ナアルトヨアコトニスル。(サウシタモ、 $\Gamma$  考ヘルノハ恐ラク自然デアルト思フ)。然ラバ  $G$  ノ有界ナ *autom.* ノ全体ハ普通ノ

$$x^{AB} = (x^A)^B \quad x^{A+B} = x^A + x^B,$$

及ビ

$$A \geq 0 \quad \text{トハ} \quad \lceil x \geq 0 \longrightarrow x^A \geq 0 \rceil$$

ヲ乗加法, 順序トシテ  $\Gamma$  ノ半順序環  $R_G$  ヲナス。所ガコトニ

定理  $G$  があ自きめです單位  $e$  ヲ有シ且ツ例ノ條件

$$(*) \quad \text{スツテノ } x = \text{對シ } e \geq x \geq -e \quad \text{ナラバ } x = 0$$

ヲ満スナラバ,  $G$  ノ有界ナ *autom.* ノ環  $R_G$  ノ加法群トシテハ  $G$  ノ或レ部分群ニ同型デアイル。

証明:  $R_G$  ヲ  $G$  ノ作用環  $\int G$  ト考ヘル。然ラバ前談話ノ諸條件ガミタサレテイル。ヨツテ  $R_G = \text{對シテ } \text{Zulässig} + G$  ノ極大 *normal* 部分群全部ノ交ハリハ 0 デイル。

今、 $\mathcal{M}$  全体ヲ  $\mathcal{M} = \{M\}$  ヲ表ハス。  $\forall M \in \mathcal{M} =$   
 對シ、 $G/M$  ハ實數群ガカヲ任意ノ  $x \in G \wedge M$  ヲ法ト  
 シテ  $e$  ノ  $\forall$  實數倍 = 合同 =  $+v$ 。  $\forall M \in \mathcal{M}$  ハ  $R_G$   
 = 對シ *zulässig* ガカヲ、  $\forall A \in R_G =$  對シテ若  
 シ  $e$  ノ像  $e^A$  ガ  $\in M$  + トラバ、  $G^A$  / 全体ガ  $\subseteq M$  テ  $\forall$ 。  
 シタガツテ 特 =  $e^A = 0$  +  $G^A \subseteq \cap M = 0$ 、  $A = 0$   
 テ  $\forall$ 。

シカモ  $e^{A+B} = e^A + e^B$  ガカヲ  $A \rightarrow e^A =$  ヨリ  $R_G$   
 ハ  $G$  ノ部分群  $\{e^A\}$  ト同型 =  $+v$ 。 即チ  $A$  ハ  $e$  ノ像  
 $e^A$  ノミテ一意的 = キマツテシマフ。(實際

$$e^A \equiv \omega_A(M) e \pmod{M}$$

トオケバ  $A \rightarrow \omega_A(M) =$  ヨリ  $R_G$  ハ  $\mathcal{M}$  / 上ノ函数  $\{\omega_A(M)\}$   
 ガ同型 = 表現サレル。

次 = 一般ノ、即チ實數ヲ係數トシテ  $\forall$  場合ヲ考ヘル  
 ト、ソレハ例ノ如ク、マツ  $x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$  / 條件カヲ  
 有理數ヲ係數 = スルモ、マテ拡張出来、シカレテ更 =  
 $\|x\| = \inf (d/d \geq x \geq -d)$  +  $v$  ノ  $v$  = ツイ  
 テ完備スレバ實數ヲ係數 = シタモ、ガ得テレル ( (\*) /  
 條件参照)。

而モ注意ノ  $A \in R_G$  ハ  $\forall$  ノ正ノ operator, 例ヘバ  
 $nI$ ,  $nI - A$  ( $I$  ハ恒等寫像) ノ差トシテ表ハサレルコ  
 トカラ容易 = ワカル如ク、 $A$  ハ  $\forall$  / 拡張サレル群 = マテ拡張  
 出来ル。 シタガツテ  $A$  ハ上記 = ヨリ  $\forall$  ハリ  $e^A (\in G)$  テ決

定# $\nu$ ,  $R_G \simeq \{e^A\}$  卜同型 = + $\nu$ .

---

(終!!)