1102 ~~250~~ normed ring ニ就イテ II

近藤 基吉

normed ring ニ關スル一ツノ問題ハソノ weak topology ヲ如何ニ定メルカデアル. コレハ normed ring ノ同型問題トモ關連シテ至難デアルガ、此処デハ一般ノ linear normed space ニ關スル ring of operators ノ topology ニ依ッテ此ノ問題ヲ考ヘテ見タイト思フ。J. v. Neumann ハ Hilbert 空間ニ關スル ring of operators ニ三種類ノ topology — uniform, strong 及ビ weak — ヲ導入シタノデアルガ、此ノ考ヘ方ヲ一般ノ ring of operators ノ場合ニ擴ゲルコトガ出來ル. 然シ此処デハコノ三種類ノ topology ノ他ニ一種類ヲ加ヘテ四種類ノ topology ヲ考ヘテ置カウ。

§2. Topologies

初メニ ring of operators ノ定義ヲ述ベル. B ヲ linear normed space トスルトキニ、B デ定義セラレ値域ガ B ニ含マレル有界線型作用素ノ全体カラナル集合ヲ $\mathfrak{L}(B)$ デ示ス. 今、$A \in \mathfrak{L}(B)$ ニ對シテ $|Af| \leq M|f|$ ヲ満タス正数 M ノ下端ヲ $|A|$ デ示シ、A ノ絶對値ト云フ. スルト、ヨク知ラ

レタヌテ＝$\mathfrak{B}(B)$ハ單位要素ヲ有スル normed ring トナル．其処デ、$\mathfrak{B}(B)$ノ algebraic sub-ring ヲ B ニ関スル ring of operators ト名付ケルコトニスル。

今、コレ等ニ次ノヌツナ topology ヲ導入スル。

I. Uniform topology. Ring of operators R ハ normed ring デアルカラ、§1. ノ方法デ uniform topology ヲ導入スルコトガ出来ル．夫レガ此処デ云フ uniform topology デアル。

$\mathfrak{B}(B)$ハ uniform topology ニ関シテ完備デアルトハ限ラナイガ、B ガ完備デアレバ$\mathfrak{B}(B)$モ亦完備トナル．何トナレバ $\{A_n\}$ $(n=1,2,\text{-----})$ ヲ $\mathfrak{B}(B)$ ノ要素カラナル Cauchy 列トスルトキニ、B ノ各点 f ニ對シテ $\{A_n f\}$ $(n=1,2,\text{-----})$ ハ又 Cauchy 列デアル．夫レ故ニ $\lim_{n\to\infty} A_n f$ $(=Af$ ト置ク$)$ ガ存在スル。スルト、A ハ B ノ上ノ有界線型作用素デアルカラ $\mathfrak{B}(B)$ ニ含マレ、$\mathfrak{B}(B)$ハ uniformly complete デアル。

Ring of operators ハ normed ring デアルガ、逆ニ次ノ定理ガ成立ツ。

定理1. R ヲ任意ノ normed ring トスルトキニ linear normed space B ヲ選ンデ R ガ $\mathfrak{L}(B)$ ノ algebraic sub-ring ト isometrically isomorphic デアルヤウニ出来ル。

又、R ヲ代数的単位要素ヲ有スル normed ring トスルトキニ、linear normed space B ヲ選ンデ R ガ $\mathfrak{L}(B)$ ノ単位要素ヲ有スル algebraic sub-ring ト uniformly isomorphic デアルヤウニ出来ル。

証明. R ヲ linear normed space ト考ヘタトキニ、$A \in R$ ニ對シテ、

$$\Phi_A(X) = AX$$

ト置ケバ $|\Phi_A(X)| \leqq |A||X|$ デアッテ、$\Phi_A \in \mathfrak{L}(B)$ トナル。從ッテ R ガ単位要素 E ヲ含ムトキニハ $\Phi_A(E) = A$ ニ依ッテ $|\Phi_A| = |A|$ ガ得ラレ、更ニ

$$\Phi_A + \Phi_B = AX + BX = (A+B)X = \Phi_{A+B}$$

$$\Phi_A \Phi_B = A(BX) = (AB)X = \Phi_{AB}$$

$$\alpha\Phi_A = \alpha AX = \Phi_{\alpha A}$$

デアルカラ、Φ_A $(A \in R)$ ノ全体カラナル ring of operators ハ R ト isometrically isomorphic デアル。

次ニ、R ガ単位要素ヲ有シナイ場合ヲ考ヘル。§1

トコロデ、R_0 ノ要素 Φ_A ニ R ノ要素 A ヲ對應セシメル寫像ハ algebraic isomorphism デ $|A-B|\leqq|\Phi_A-\Phi_B|\,|E|$ ヨリ uniformly continuous デアル。夫故ニ §1 ノ補助定理2 ヨリ R ハ R_0 ト uniformly isomorphic デアル。

次ニ、R ガ uniformly complete デナイトキニハ §1 ノ方法デ R ヲ uniformly complete ニ擴ゲテ置イテ上ノ方法ヲ應用スレバ十分デアル。(證明完了)

(注意) $\Phi_A(X)$ ノ代リニ $\Psi_A(X)=XA$ ヲ考ヘルト

$$\Psi_A+\Psi_B=\Psi_{A+B},\quad \Psi_A\Psi_B=\Psi_{BA},$$

$$\alpha\Psi_A=\Psi_{\alpha A}$$

ガ成立チ、R ガ單位要素 E ヲ含ムトキニハ、$|\Psi_A|=|A|$ ガ得ラレル。從ッテ、Ψ_A ノ全体ハ R ト isometrically anti-isomorphic デアル。又、R ガ代数的單位要素ヲ有スルトキニハ、Ψ_A ノ全体ハ R ト uniformly anti-isomorphic デアル。

$\mathfrak{L}(B)$ ハ F. Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ満タスガ、B ガ可分ナモ $\mathfrak{L}(B)$ ガ uniform topology ニ關シテ可分デアルトハ限ラス。

II. *Strong topology.* $A \in \mathcal{L}(B)$, $f_k \in B$ ($k = 1, 2, \cdots n$), $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$|(A - X) f_k| < \varepsilon \quad (K = 1, 2, \cdots n)$$

ヲ滿タス X ノ集合ヲ $\mathfrak{U}(A, f_1 \cdots f_n, \varepsilon)$ デ示シ，A ノ strong vicinity ト云フ。然ルトキニ、$\mathcal{L}(B)$ ハ strong vicinity ニ關シテ Hausdorff 空間デアル。從ッテ又、B ニ關スル ring of operators ハ Hausdorff 空間トナル。コレヲ ring of operator ノ strong topology ト云フノデアル。

strong topology ニ關シテ ring of operators ハ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲミタストハ限ラナイガ、任意ノ正數 ρ ニ對シテ $|A| \leqq \rho$ ヲミタス $\mathcal{L}(B)$ ノ要素 A ノ集合ヲ $\mathcal{L}(B, \rho)$ トスレバ、次ノ定理ガ成立スル。

定理 2. B ガ uniform topology ニ關シテ可分デアレバ、任意ノ正數 ρ ニ對シテ $\mathcal{L}(B, \rho)$ ハ strong topology ニ關シテ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ滿ス。

證明. B デ稠密ナル可附番集合 $\{g_k\}$ ($K = 1, 2, \cdots$) ヲ取リ、$\mathfrak{U}(A, g_1, \cdots, g_n, \frac{1}{m})$ ($n, m = 1, 2, \cdots$) ヲ作ル。スルトコレ等ノ作ル A ノ近傍系ハ $\mathcal{L}(B, \rho)$ ニ於イテ A ノ strong vicinity ノ完全系ト對等ニナル。夫レヲ證明スルタメニ、$\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)$ ヲ取ル。

其処デ、$|f_K - g_{\nu_K}| < \frac{1}{3\rho}\varepsilon$ $(K=1,2,\cdots\cdots n)$ ヲ満タス g_{ν_K} $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ選ブ。スルト $|(A-X)g_{\nu_K}| < \frac{1}{3}\varepsilon$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ満ス. $A, X \in \mathfrak{L}(B,\rho)$ ニ対シテ

$$|(A-X)f_K| \leqq |(A-X)g_{\nu_K}| + |(A-X)(g_{\nu_K}-f_K)|$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + |A||g_{\nu_K}-f_K| + |X||g_{\nu_K}-f_K|$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \rho\frac{1}{3\rho}\varepsilon + \rho\frac{1}{3\rho}\varepsilon = \varepsilon$$

デアルカラ、$\bar{n} > \nu_K$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$, $\bar{m} > \frac{3}{\varepsilon}$ トスレバ

$$\mathfrak{L}(B,\rho)\,\mathfrak{U}(A, g_1, \cdots\cdots, g_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{m}})$$
$$\leqq \mathfrak{L}(B,\rho)\,\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$$

ガ得ラレ、$\mathfrak{L}(B,\rho)$ ハ *strong topology* ニ関シテ *Hausdorff* ノ第一可附番性公理ヲ満タス（証明完了）

B ガ *uniform topology* ニ関シテ可分デアッテモ、B ニ関スル *ring of operators* ハ *strong topology* ニ関シテ可分トハ云ヘナイ。然シ次ノ定理ガ成立スル。

定理3. B ガ *uniform topology* ニ関シテ可分デアレバ、$\mathfrak{L}(B)$ ノスベテノ部分集合ハ *strong topology* ニ関シテ可分デアル。

証明. B デ稠密ナル可附番集合 g_K $(K=1,2,$

-------）ヲ取ル。其処デ、コノ中カラ互ニ独立ナル

$$g_{\nu_1} \text{-----} g_{\nu_K},\ g_{\mu_1} \text{-----}\ g_{\mu_K}$$

ヲ選ビ、g_{ν_1}----- g_{ν_K} ニテ張ラレル linear space（g_{ν_1}----- g_{ν_K}）ヲ作ル。次ニコノ上ニ線型汎函数$\varphi(f)$ヲ定義シテ

$$\varphi(g_{\nu_i})=0\ (i\neq j),\quad \varphi(g_{\nu_j})=1\qquad |\varphi|=1$$

ノ成立スル様ニスル。更ニ、コレヲ絶對値ヲ上ゲナイヤウニシテB 全体ニ拡ゲル。夫ヲ$\varphi_j(f)$トシ

$$C_j(f)=\varphi_j(f)\,g_{\mu_j},\qquad C(f)=\sum_{j=1}^{K}C_j(f)$$

ト置ク。スルト之ハ$\mathfrak{B}(B)$ニ属シ

$$C(g_{\nu_j})=g_{\mu_j}\qquad (j=1,2,\text{-----}K)$$

デアル。今、此ノヤウナCヲ（g_{ν_1}-----g_{ν_K}; g_{μ_1}-----g_{μ_K}）ノ各々ニ對シテ一ツヅツ定メ、夫レ等ノ全体カラナル集合ヲ$\mathfrak{F}$トスレバ、$\mathfrak{F}$ハ可附番デアル。トコロデ、コレハ strong topology ニ關シテ$\mathfrak{B}(B)$デ稠密デアル。夫ハ次ノ様ニシテ判ル。

今、$\mathfrak{U}(A, f_1, \text{-----}, f_n, \varepsilon)$ヲ與ヘル。$\varepsilon>0$ニ對シテ$g_{\nu_K}$（$K=1,2,\text{-----},n$）ヲ選ンデ互ニ独立デ、シカモ$|f_K-g_{\nu_K}|<\varepsilon$（$K=1,2,\text{-----},n$）デアルヤウニスル。次ニ　g_{μ_K}（$K=1,2,\text{-----},n$）ヲ選ンデg_{ν_1}-----g_{ν_n}

$g_{\mu_1}, \cdots\cdots, g_{\mu_n}$ ガ独立デ、シカモ $|g_{\mu_k} - A g_{\nu_k}| < \bar{\varepsilon}$ ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) デアルヤウニスル。スルト ($g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_n}, g_{\mu_1}, \cdots\cdots g_{\mu_n}$) ニ對應スル $\mathfrak{F}$ ノ要素ガ存在スル. 夫レヲ C ト置ケバ

$$(*) \quad |(A-C)f_k| \leqq |(A-C)g_{\nu_k}| + |(A-C)(g_{\nu_k} - f_k)|$$
$$\leqq |(A-C)g_{\nu_k}| + |A'(g_{\nu_k} - f_k)| + |C(g_{\nu_k} - f_k)|$$

トナル。然ルニ

$$|C(f)| \leqq \sum_{j=1}^{n} |C_j(f)| \leqq \sum_{j=1}^{n} |g_j(f)||g_{\mu_j}|$$
$$\leqq \left\{\sum_{j=1}^{n} |g_{\mu_j}|\right\} |f|$$

デアルカラ、$\max\limits_{k=1,2,\cdots n} |Af_k| = M$ トスレバ

$$|g_{\mu_j}| \leqq \varepsilon + |Ag_{\nu_j}| \leqq \bar{\varepsilon} + |A||g_{\nu_j} - f_j| + |Af_j|$$
$$< \bar{\varepsilon}(1+|A|) + M$$

ヨリ

$$|C(f)| < n\{\bar{\varepsilon}(1+|A|) + M\}|f|$$

トナル。又

$$|(A-C)g_{\nu_k}| = |Ag_{\nu_k} - g_{\mu_k}| < \bar{\varepsilon} \quad (k=1,2,\cdots\cdots,n)$$

デアルカラ，(*) ヨリ

$$|(A-C)f_k|$$
$$\leqq \bar{\varepsilon} + |A|\bar{\varepsilon} + n\bar{\varepsilon}\{\bar{\varepsilon}(1+|A|) + M\} = K\bar{\varepsilon}$$

ガ得ラレル。此処デKハ常数デアルカラ $\bar{\varepsilon}$ ヲ十分小ニ選ンデ $K\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ トスレバ, $C \in \mathfrak{U}(A, f_1 \text{----} f_n, \varepsilon)$ ガ成リ立チ, A ガ strong topology ニ關スル $\mathfrak{F}$ ノ集積点デアルコトガ判ル。従ッテ strong topology ニ關シテ $\mathfrak{F}$ ハ $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ デ稠密デアル。

次ニ $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ ノ任意ノ空デナイ部分集合 $\mathfrak{M}$ ヲ考ヘル。$A \in \mathfrak{M}$ ト互ニ独立ナル $g_{\mu_1} \text{-----} g_{\mu n}$ トニ對シテ $\mathfrak{U}(A, g_{\mu_1} \text{-----} g_{\mu n}, \frac{1}{m})$ ヲ作リ、コノ中ニ $\mathfrak{F}$ ノ含マレル要素ノ一ツ C ヲ取ル。スルト、$(A, g_{\mu_1} \text{-----} g_{\mu n}, m, C)$ ナル組ガ得ラレル, 其処デ、$g_{\mu_1} \text{-----} g_{\mu n}, m, C$ ニ對應スル A ノ一ツヲ取ッテ $A_{g_{\mu n}, m, C}$ トスル。

然ルトキニ コレ等ノ作ル集合 $\mathfrak{F}_0$ ハ高々可附番デアルガ、strong topology ニ關シテコレハ $\mathfrak{M}$ デ稠密デアル。夫レヲ示サウ。

$A \in \mathfrak{M}$ ニ對シテ $\mathfrak{U}(A, f_1 \text{-----} f_p, \varepsilon)$ ヲ與ヘル。其処デ $|f_K - g_{\nu K}| < \varepsilon$ $(K = 1, 2, \text{----} p)$ ヲ満ス $g_{\nu K}$ $(K = 1, 2, \text{-----} p)$ ヲ取ル。然ルトキニハ、$C \in \mathfrak{F}$ デ $|(A - C) g_K| < \varepsilon$ $(K = 1, 2, \text{----} p)$ ナルモノガ存在スル 其処デ、$A_{g_{\nu K}, \varepsilon, C}$ $(= A_0$ ト置ク$)$ ヲ取レバ

$$
\begin{aligned}
|(A_0 - A) f_K| &\leqq |(A_0 - A) g_{\nu K}| + |(A_0 - A)(g_{\nu K} - f_K)| \\
&\leqq |(A_0 - C) g_{\nu K}| + |(C - A) g_{\nu K}| \\
&\quad + |(A_0 - A)(g_{\nu K} - f_K)| \\
&< (2 + |A_0| + |A|)\, \varepsilon
\end{aligned}
$$

デアルカラ、$\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{S}(B, \rho)$ デアレバ $|(A_0 - A) f_K| < 2(1 + \rho)\varepsilon$ ガ得ラレ、*strong topology* ニ關シテ $\mathfrak{F}_0$ ハ $\mathfrak{A}$ デ稠密デアル。次ニ $\mathfrak{A}$ ガ有界デナイトキニハ、コレヲ有界ナルモノノ可附番個ノ和トナシ得ル故ニ コノ場合モ *strong topology* ニ關シテ $\mathfrak{F}_0$ ハ $\mathfrak{A}$ デ稠密デアル。

III. *Feeble topology* $A \in \mathfrak{S}(B)$, $\Phi_K \in \overline{\mathfrak{S}(B)}$ $(K = 1, 2, \cdots\cdots, n)$, $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$|\Phi_K (A - X)| < \varepsilon \quad (K = 1, 2, \cdots\cdots n)$$

ヲミタス X ノ集合ヲ $\mathfrak{U}(A, \Phi_1, \cdots\cdots \Phi_n, \varepsilon)$ ニテ示シ A ノ *feeble vicinity* ト云フ。スルト，$\mathfrak{S}(B)$ ハコノ近傍系ニ關シテ Hausdorff 空間ヲナス。B デ隔スル *ring of operators* ニ對シテモ同樣デアル。コノ *topology* ヲ *feeble* ト名付ケルコトニスル。

Feeble topology ハ *strong topology* ト共ニ *uniform topology* ヨリモ弱イガ、*feeble topology* ト *strong topology* トハ比較ガ出来ナイ。何トナレバ、*S. Mazur* ノ定理ヨリ *uniform topology* ニ關シテ閉ヂタ凸集合ハ *feeble topology* ニ關シテモ閉ヂテ居ル。トコロデ、其ノヤウナ凸集合ノ中ニ *strong topology* ニ關シテ閉ヂテ居ナイモノガアル。實際、$\mathfrak{S}(B)$ ノ *sub-ring* デアッテ

strong topology ニ関シテ閉ヂテ居ラナイモノヲ作ルコトガ出来ル。

一方、$\mathfrak{A}(B)$ ノ部分集合 $\mathfrak{N}$ デ feeble topology ニ関スル集積点ガ strong topology ニ関シテサウデナイモノガアル。其レハ次ノヤウニシテ與ヘラレル。B ノ要素 f_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ選ンデ weakly ニ 0 ニ収斂スルガ uniformly ニ 0 ニ収斂シナイヤウニスル。次ニ、$\varphi\in\bar{B}$ ニ對シテ

$$A_g(f)=\varphi(f)g$$

トスル。明ラカニ $A_g\in\mathfrak{A}(B)$ デアル。今 A_g ノ全体カラナル集合ヲ R トスレバ $|A_g|=|\varphi||g|$ トナリ R ハ uniform topology ニ関シテ閉デアル。其処デ、$\Phi\in\mathfrak{A}(B)$ トスレバ、Φ ハ R ノ上ノ linear functional デアル。從ッテ B ノ上デ

$$\psi(g)=\Phi(A_g)$$

トスレバ、$|\psi|\leqq|\Phi||A_g|\leqq|\Phi||\varphi||g|$ ガ得ラレ、$\varphi(g)$ ハ有界デアル。從ッテ、$f_n\to 0$ weakly ヨリ $\varphi(f_n)\to 0$ ヨリ $\Phi(A_{f_n})\to 0$ デアル。即チ、$A_{f_n}\to 0$ feebly ガ成立スル。然シ、一方ニテ $|A_{f_n}|=|\varphi||f_n|\to 0$ デハナイ。即チ、$A_{f_n}\to 0$ strongly デハナイ。

又、feeble topology ニ関シテ ring of operators R ハ Hausdorff ノ第一可附番性

公理ヲミタストモ限ラナイシ，又 B ガ可分デアッテモ R ガ feeble topology ニ関シテ可分トハ云ハレナイ。

IV. *Weak topology.* 此處デ上デ與ヘタイヅレノ topology ヨリモ更ニ弱イモノヲ考ヘヨウ。

$A \in \mathfrak{R}(B)$, $f_K \in B$, $\varphi_K \in \overline{B}$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$|\varphi_K((A-X)f_K)|<\varepsilon \quad (K=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲミタス X カラナル集合ヲ $\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n, \varepsilon)$ デ示シ A ノ weak vicinity ト云フ。シカルトキニ、$\mathfrak{R}(B)$ ハコレニ関シテ Hausdorff 空間ヲナシテ居ル。B ニ関スル ring of operators ニ對シテモ同様デアル。コレヲ B ニ関スル ring of operators ノ weak topology ト名付ケル。

先ヅ Hausdorff ノ第一可附番性公理ニ関シテ次ノ定理ガ成立ツ。

定理4. $\overline{B}$ ガ uniform topology ニ関シテ可分デアレバ、任意ノ正數 ρ ニ對シテ $\mathfrak{R}(B,\rho)$ ハ weak topology ニ関シテ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ満ス。

證明. $\overline{B}$ ガ uniform topology ニ関シテ可

分デアルカラ、B モ亦 uniform topology ニ関シテ可分デアル。今、g_K, ψ_K ($K=1,2,\cdots\cdots$) ヲ夫々 $B, \overline{B}$ ニテ稠密ナル可附番集合トスル。其処デ $U(A, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varphi_1, \cdots\cdots \varphi_n, \varepsilon)$ ヲ含マレル $U(A, g_{\mu_1}, \cdots\cdots g_{\mu_n}, \psi_{\nu_1}, \cdots\cdots \psi_{\nu_n}, \delta)$ ノ存在スルコトヲ示サウ。正数 δ ニ對シテ

$$|f_k - g_{\mu_k}| < \delta, \quad |\varphi_k - \psi_{\nu_k}| < \delta, \quad |\psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| < \delta$$

$$(k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

トスルトキニ $A, X \in \mathfrak{S}(B, \rho)$ ヨリ

$$\begin{aligned}
&|\varphi_k((A-X)f_k)| \\
&\leqq |\psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| + |\varphi_k((A-X)f_k) - \psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| \\
&< \delta + |\varphi_k((A-X)f_k) - \varphi_k((A-X)g_{\mu_k})| \\
&\qquad + |\varphi_k((A-X)g_{\mu_k}) - \psi_{\nu_k}((A-X)g_{\mu_k})| \\
&\leqq \delta + |\varphi_k||A-X||f_k - g_{\mu_k}| + |\varphi_k - \psi_{\nu_k}||A-X||g_{\mu_k}| \\
&< \delta + 2|\varphi_k|\rho\delta + 2\rho\delta(|f_k| + \delta) < c\delta
\end{aligned}$$

トナルカラ、δ ヲ $c\delta < \varepsilon$ ノ成立スルヤウ選ベバ十分デアル。（証明完了）

次ニ、weak topology ニ関スル $\mathfrak{S}(B)$ ノ可分性ハ strong topology ニ関スル $\mathfrak{S}(B)$ ノ可分性ヨリ明ラカデアル。即チ、定理3ニヨッテ B ガ uniform topology ニ関シテ可分デアレバ $\mathfrak{S}(B)$

ノ凡ベテノ部分集合ハ weak topology ニ関シテ可分トナル。

又, weak topology ニ関シテハ次ノ定理ガ成立ツ。

定理 5. B ガ locally weakly bicompact ノトキニハ、$\mathfrak{L}(B)$ ハ又 weak topology ニ関シテ locally bicompact デアル。

証明. $|f| \leqq 1$ ヲ満スBノ要素fノ集合ヲ B_0 トスレバ、B_0 ハ勿論 weakly bicompact デアル. 其処デ $B_0^{(f)} (= B_0)\ (f \in B_0)$ ノ直積

$$B_0^* = \prod_{f \in B_0} \otimes B_0^{(f)}$$

ヲ作ル. $A \in B_0^*$ ノトキニハ $B_0^{(f)}$ ニ於ケル A ノ成分ヲ $A^{(f)}$ デ示スコトニスル。従ッテ、$A^{(f)} \in B_0^{(f)}$ トナル。

今, $\varphi_K \in \overline{B}$, $f_K \in B_0$ $(K = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ニ對シテ

$$|\varphi_K(A^{(f_K)} - X^{(f_K)})| < \varepsilon \quad (K = 1, 2, \cdots\cdots n)$$

ヲ満タス $X \in B_0^*$ ノ集合ヲ $\bar{A}$ ノ近傍ト定義スル。スルト, A. Tychonoff ノ定理ニヨッテ B_0^* ハ bicompact デアル。

次ニ, $\mathfrak{L}(B, 1)$ ノ任意ノ要素Aニ対シテ $|A| \leqq 1$ デアルカラ B_0^* ニ含マレル要素 $\bar{A}$ ヲ求メテ

$$\overline{A}^{(f)} = A(f) \quad (f \in B_0)$$

デアルヤウニ出来ル。$A = \overline{A}$ ヲ対応セシメル対応ヲ考ヘルト $\mathfrak{S}(B,1)$ ノ要素ハ一対一ノ仕方デ B_0^* ノ部分集合 —— コレヲ $\mathfrak{S}$ ニテ示ス —— ニ写サレル。トコロデ、$\mathfrak{S}(B,1)$ ノ *weak topology* ト $\mathfrak{S}$ ノ *topology* トハ同等デアルカラ、$\mathfrak{S}(B,1)$ ト $\mathfrak{S}$ トノ対応ハ位相的デアル。

然ルニ B_0^* ニ於イテ $\mathfrak{S}$ ハ閉集合デアル。何トナレバ、$P \in B_0^*$ ガ $\mathfrak{S}$ ノ集積点デアレバ、$\varphi_K \in B$, $f_K \in B_0$ $(K=1,2,\cdots,n)$, $\varepsilon>0$ ニ対シテ

$$|\varphi_K(P^{(f_K)} - \overline{X}^{(f_K)})| < \varepsilon, \quad \overline{X} \in \mathfrak{S}$$

ヲ満足スル $\overline{X}$ ガ存在スル。$\varepsilon = \frac{1}{n}$ ニ対シテコノ様ナ $\overline{X}$ ノ一ツヲ $\overline{X}_n$ トスレバ、$\varphi_K(\overline{X}_n^{(f_K)}) \longrightarrow \varphi_K(P^{(f_K)})$ ガ成立ツ。今、特ニ $\varphi_K = \varphi$, $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = f+g$ トスレバ

$$\begin{aligned}
&\varphi(P^{(f+g)}) - \varphi(P^{(f)}) - \varphi(P^{(g)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \varphi(\overline{X}_n^{(f+g)}) - \varphi(\overline{X}_n^{(f)}) - \varphi(\overline{X}_n^{(g)}) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi \left\{ \overline{X}_n^{(f+g)} - \overline{X}_n^{(f)} - \overline{X}_n^{(g)} \right\}
\end{aligned}$$

トナル。トコロデ、$\overline{X}_n^{(h)} = \overline{X}_n(h)$ デアルカラ

$$\begin{aligned}
&\overline{X}_n^{(f+g)} - \overline{X}_n^{(f)} - \overline{X}_n^{(g)} \\
&\qquad = X_n(f+g) - X_n(f) - X_n(g) = 0
\end{aligned}$$

ガ成立チ．$\varphi(P^{(f+g)})=\varphi(P^{(f)})+\varphi(P^{(g)})=\varphi(P^{(f)}+P^{(g)})$デアル．$\varphi$ハ$\overline{B}$ノ任意ノ要素デアルカラ

$$P^{(f+g)}=P^{(f)}+P^{(g)}$$

トナル．同様ニ

$$\alpha P^{(f)}=P^{(\alpha f)}$$

ガ得ラレル．又，$\varphi(P^{(f)})=\lim_{n\to\infty}\varphi(X_n(f))$，$|X_n|\leqq 1$ $(n=1,2,\text{-----})$ニ依ッテ

$$|\varphi(P^{(f)})|=\lim_{n\to\infty}|\varphi(X_n(f))|$$

$$\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi||X_n||f|\leqq|\varphi||f|$$

デアル．夫レ故ニ$|\varphi|=1$，$|\varphi(P^{(f)})|=|P^{(f)}|$トスレバ，$|P^{(f)}|\leqq|f|$トナル。従ッテ，$P=\overline{Q}$ナル$Q$ガ存在シナケレバナラナイ。即チ，$P\in\mathfrak{S}$ガ得ラレ、$\mathfrak{S}$ハ$B_0^*$ノ閉集合デアル。コレヨリ$\mathfrak{S}$或ヒハ$\mathfrak{S}(B,1)$ノ*bicompact*ナルコトガ知ラレル。（証明完了）

以上ガ*ring of operators*ニ関スル四種類ノ*topology*デアルガ、任意ノ*normed ring* Rハ適当ニ選バレタ*linear normed space* Bニ関スル*ring of operators* R_0ト*uniformly isomorphic*デアルカラ、R_0ニ関スル上記ノ*topology*ヲ以テRノ*topology*トスルコトガ出来ル。

コノ中デ uniform ト feeble topology トハ B ノ選擇ニ關係シナイモノデアル。夫レ故ニ，コレヲ R ノ uniform 及ビ feeble topology ト名付ケ、コレニ對シテ strong ト weak topology トハ B ニ關係スルカラ、夫レヲ R ノ B-strong 及ビ B-weak topology ト名付ケル。勿論、後ノ二ツハ $\mathcal{A}(B)$ ノ algebraic sub-ring ノ取リ方ニ關係スルガ、簡單ノタメニコノヤウニ呼ブコトニスル。

尚. normed ring R ニ導入サレル uniform, feeble B-strong 及ビ B-weak topology ヲ簡便ニ (u)-, (f)-, (s_B)- 及ビ (w_B)-topology ト云ヒ，又此等ノイヅレ一ツテ代表的ニ (τ)-topology デ示スコトニスル。