1101. Normed ring ニ就イテ I

近藤基吉

近来 normed ring ノ理論デハ J. Gelfand commutative normed ring ノ論文ヤ J. v. Neumann - F. J. Murray ノ ring of operators ノ論文等ガ出テ居ルガ、此等ノ結果ノ中デ一体ドレダケノモノガ一般ノ normed ring デ成立ツデアラウカ。又，既ニ抽象代数学デ得ラレテ居ル環ニ関スル結果ノ中デ，ドレダケノモノヲ一般ノ normed ring ニ擴ゲウルデアラウカ．コノヤウナ問ハ十分知ラレテ居ルコトカモ知レナイガ、一應シラベテオクコトガ此ノ方面ノ研究ヲナス上ニ大事デハナイカト思フ。其ノヤウナ意味デコノ方面ノ結果ヲ少シ調ベテ居ルガ，判ッタコトヲ書イテ見タイト思フ．コレハ発表スルホドノ事デナイカモ知レナイガ、結果ヲマトメルタメニ書ク次第デアル。

今回ハ normed ring ニ関係スル各種ノ概念デ基本的ト思ハレルモノヲ列ベルコトニシタ。此処デ上ゲタ他ニモ各種ノ基本的概念ガアルガ、夫ヲ準備ヲ要スルノデ必要ニ應ジテアタヘテ行クコトニスル。

§1. 定義

先ヅ normed ring ノ定義ヲ與ヘテ置カウ。集合 R ガ條件

1° R ハ加群デアル.

2° R ノ任意ノ二ツノ要素 A, B ニ對シテ其ノ積 AB ハ再ビ R ニ屬シ, 次ノ性質ヲ有スル。

(α) $(AB)C = A(BC)$

(β) $(A+B)C = AC+BC,$

$C(A+B) = CA+CB.$

3° R ノ任意ノ要素 A ト任意ノ複素數 α トノ積 αA ハ又 R ニ屬シ, 次ノ性質ヲ有スル。

(α) $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A,$

$\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B.$

(β) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),\quad (\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta AB$

(γ) $1A = A,\quad 0A = 0$

4° R ノ各要素 A ニハ其ノ絶對値 —— $|A|$ デ示ス —— ト呼バレル實數ガ對應シ、次ノ性質ヲ有スル。

(α) $|A| \geqq 0$, シカモ $A=0$ ノトキニ限ッテ $|A|=0$ デアル。

(β) $|A+B| \leqq |A|+|B|$

(γ) $|AB| \leqq |A||B|$

ヲ満スモノヲ normed ring ト云フ。

R ハ複素數ヲ係數域トスル環デアルカラ、環ニ關スル各種ノ概念ヲ R ノ上ニ導入スルコトガ出來ル. 然シ, 夫レ等ハ省イテ特ニ絶對値ニ關係スルモノヲ此処デ述ベテ置ク。

R ノ要素 E デ條件『R ノ各要素 A ニ對シテ AE＝EA＝A デアル』ヲ満足スルモノガアレバ, ソレハ唯一ツデアル. コレヲ R ノ代數的單位要素ト云フ。コノトキニハ $|E| = |E^2| \leqq |E||E|$ ヨリ $|E| \geqq 1$ デアルが、特ニ $|E| = 1$ デアレバ, E ヲ R ノ單位要素ト呼ブコトニスル. R ニ單位要素ノ存在シナイトキニハ R ニ新ラシイ要素 E ヲ添加シテ得ラレル環 R|E| が再ビ normed ring デシカモ E が其ノ單位要素デアルヤウニ出來ル. 夫レニハ E ヲ與ヘテ

$1°\quad AE = EA = A\ (A \in R), \qquad E^2 = E$

$2°\quad |\alpha E + A| = |\alpha| + |A|$

トスレバ十分デアル。又, R ノ要素 E_r, E_l デ條件『R ノ各要素 A ニ對シテ $AE_r = E_l A = A$ デアル』ヲ満スモノが存在スレバ, 夫レ等ヲ夫々 R ノ右及ビ左ノ代數的單位要素トイフ. 一般ニハ $|E_r|, |E_l| \geqq 1$ デアルが, 特ニ 1 ニ等シイトキニ夫レ等ヲ R ノ右及ビ左ノ單位要素ト呼ブ。

次ニ，Rガ（代数的）単位要素Eヲ含ム場合ヲ考ヘル．Rノ要素Aニ對シテ

$$A A_r^{-1} = A_l^{-1} A = E$$

ヲ満足スルA_r^{-1}，A_l^{-1}ガ存在スレバ，コレ等ヲソレゾレAノ右及ビ左ノ（代数的）逆要素ト呼ビ，更ニコレ等ガ互ニ相等シイトキニ夫レヲAノ（代数的）逆要素ト名付ケA^{-1}デ示ス。又，Rノ要素デ（代数的）逆要素ノ存在スルモノヲRノ（代数的）正則要素ト呼ブ．更ニRノ要素Aデ

$$|A| = |A^{-1}| = 1$$

ヲ満スモノヲRノ単位的要素ト名付ケヨウ。

次ニ，Rノ任意ノ二ツノ要素A,Bニ對シテ

$$dis\,(A, B) = |A - B|$$

トスレバ，dis（A,B）ニ関シテRハ距離空間トナル。Rノコノ topology ヲ uniform ト呼ブ。

Rハ uniform topology ニ関シテ完備デアルトハ限ラナイが，完備デアレバ uniformly complete デアルト云フ。尚，uniformly complete デナケレバ Cauchy ノ方法ニヨッテ uniformly complete ニスルコトが出来ル。

A±B，ABハ共ニRノ uniform topology ニ関シテA,Bノ連續函数デアリ，αAハα，Aニ関シテ連續デアル。又，|A|ハAノ連續函数デアル。

今，連續性ニ關スルコレ等ノ性質ヲ利用シテ逆要素ノ存在ノ問題ヲ考ヘル．Rヲ代數的單位要素 Eヲ有スル uniformly complete normed ring トスル。

補助定理1. $|A|<1$ ノトキニハ $E-A$ ハ代數的逆要素ヲ有スル。

證明. $S_n=\sum_{K=0}^{n} A^K \ (n=1,2,\cdots\cdots)$ トスレバ，$n>m$ ニ對シテ

$$|S_n-S_m|=|A^{m+1}+\cdots\cdots+A^n|$$
$$\leqq|A|^{m+1}+\cdots\cdots+|A|^n\leqq\frac{\rho^{m+1}}{1-\rho}$$

（但シ，$|A|=\rho<1$）デアルカラ，Rノ完備性ヨリ $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{K=0}^{\infty} A^n$（$=B$ ト置ク）ガ存在スル．然ルニ

$$(E-A)S_n=S_n(E-A)=E-A^{n+1}$$

デアッテ $\lim_{n\to\infty} A^n=0$ デアルカラ $(E-A)B=B(E-A)=E$ 即チ，$E-A$ ハ代數的逆要素ヲ有スル．

$A\in R$ が（代數的）正則要素デアルトキ $\Phi(X)=A^{-1}X$ トスレバ，コレハ R デ連續デアル．從ッテ Aノ近傍 $U(A)$ ヲ選ンデ $X\in U(A)$ ノ時ニ

$$|\Phi(A)-\Phi(X)|=|E-A^{-1}X|<\rho<1$$

デアルヤウニ出来ル。夫レ故ニ，$E-A^{-1}X=B$ トスレバ $E-B=A^{-1}X$ ハ補助定理ニヨリ（代数的）逆要素ヲ有スル。夫レヲ C トスレバ，$(CA^{-1})X=C(A^{-1}X)=E$ デアル。一方ニテ

$$X(CA^{-1})=A(A^{-1}XC)A^{-1}=E$$

デアルカラ，X ハ（代数的）逆要素ヲ有スル。即チ，A ノ近傍ニアル要素ハ（代数的）正則デアル。

今，R ノ（代数的）正則要素ノ全体ノ作ル集合ヲ $\mathfrak{G}$ トスル。$\mathfrak{G}$ ハ開集合デ、シカモ乗法ニ関シテ群ヲナシテ居ル。

次ニ，$\mathfrak{G}$ デ $\Psi(X)=X^{-1}$ ヲ考ヘヨウ。$X, A\in\mathfrak{G}$ ノ時ニハ

$$\Psi(X)-\Psi(A)=X^{-1}-A^{-1}=(X^{-1}A-E)A^{-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(E-A^{-1}X)^{n}A^{-1}$$

デアルカラ，$|X-A|<\rho<|A^{-1}|^{-1}$ トスレバ

$$|\Psi(X)-\Psi(A)|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|E-A^{-1}X|^{n}|A^{-1}|$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}|A^{-1}|^{n+1}|A-X|^{n}<\frac{|A^{-1}|^{2}}{1-|A^{-1}|\rho}\rho$$

トナル。従ッテ $\Psi(X)$ ハ $\mathfrak{G}$ デ連続デアル。以上ノ結果ヲ次ノ様ニ述ベルコトガ出来ル。

定理1. Rヲ代數的單位要素ヲ有スル uniformly complete normed ring トスレバ, Rノ代數的正則要素ノ全体ノ作ル集合 $\mathfrak{G}$ ハ Rデ開イテ居テ、シカモ乘法ニ關シテ位相群ヲナシテ居ル。又 X^{-1} ハ $\mathfrak{G}$ ニ於テ連續デアル。(1)

Rノ部分集合 R_0 デ再ビ環ヲナシテ居ルモノヲ Rノ代數的部分環ト呼ビ, 特ニ uniform topology ニ關シテ Rデ閉ヂテ居ルモノヲ Rノ部分環ト呼ブ. uniformly complete normed ring ノ subring ハ又 uniformly complete デアル。

次ニ, 二ツノ normed ring R_K $(K=1,2)$ ヲ考ヘル. R_1 ノ各要素 A_1 ニ R_2 ノ要素 A_2 ヲ對應セシメル寫像デ A_1+B_1 ニハ A_2+B_2 ヲ, A_1B_1 ニハ A_2B_2 ヲ, αA_1 ニハ αA_2 ヲ對應セシメルモノヲ algebraic homomorphism ト云ヒ, 又コノ中デ uniform topology ニ關シテ連續ナルモノヲ uniform homomorphism ト云フ。更ニ, コノ中デ開集合ヲ開集合ニ寫スモノヲ open uniformly homomorphism ト名付ケルコトニスル。

---

(1) M. Nagumo, Einige analytischen Untersuchungen in linearen metrischen Ringen. Japanese Jour of Math. vol. XIII. 1936

又，R_1 ト R_2 トノ間ノ algebraic homomorphism デ一對一對應ノモノヲ algebraic isomorphism ト呼ビ，コレガ uniform topology ニ關シテ両側連續デアレバコノ寫像ヲ uniformly isomorphism ト云フ。スルト，次ノ補助定理ガ成立ツ。

補助定理 2. $R_K (K=1,2)$ ヲ uniformly complete normed ring トスルトキニ，R_1 ヲ R_2 ニ寫ス algebraic isomorphism $\varphi(t)$ ガ t ニ關シテ連續デアレバ，R_1 ト R_2 トハ uniformly isomorphic デアル。

証明ハ S. Banach ノ定理ニヨリ自明デアルガ有效デアル。

次ニ，R_1 ト R_2 トノ間ノ uniformly isomorphism デ $|A_1|=|A_2|$ ノ成立ツモノヲ isometrically isomorphism ト名付ケル。R_1 ガ uniformly complete ナルトキニ，R_1 ノ isometrically isomorphism ニ關スル像ハ又 uniformly complete デアル。

更ニ，R_1 ヲ夫自身ノ中ニ寫ス algebraic 又ハ uniformly isomorphism ヲ algebraic 又ハ uniformly automorphism ト名付ケル。isometrically automorphism モ同樣ニ定義スル。$\mathbb{U}$ ヲ單位的要素トスルトキニ $\mathbb{X}$ ヲ $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{U}$ ニ寫

ス寫像ハ isometrically automorphism デアル。

次ニ，R_1 ノ各要素 A_1 ニ R_2 ノ要素 A_2 ヲ對應セシメル寫像デ A_1+B_1 ニハ A_2+B_2 ヲ，A_1B_1 ニハ B_2A_2 ヲ對應セシメルモノヲ algebraic anti-homomorphism ト呼ビ，コレガ uniform topology ニ關シテ連續デアレバコレヲ uniformly anti-homomorphism ト云フコトニスル。同樣ニシテ，anti-isomorphism 及ビ anti-automorphism ヲ定義スル。

今，R ノ上ノ uniformly anti-automorphism ヲ考ヘル．R ノ要素 A ニ對應スルモノヲ A^* トスレバ

$$(A+B)^*=A^*+B^* \qquad (AB)^*=B^*A^*$$

デアッテ，A ニ A^{**} ヲ對應セシメル寫像ハ R ノ上ノ uniformly isomorphism デアル．此處デ特ニ

$$|A|=|A^*|, \qquad A^{**}=A$$

ノ成立ツトキニ，R ヲ involuted ring ト呼ブコトニスル．コノ場合ニ $(\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*$ デアレバ，R ハ proper デアルト云ヒ，$(\alpha A)^*=\alpha A^*$ デアレバ，R ハ improper デアルトイフコトニシヨウ。更ニ，此レ等ノ場合ニ $A=A^*$ ヲ滿ス要素 A ヲ hermitian ト名

付ケル. $A+A^*$ 及ビ AA^* ノ *hermitian* デアルコトハ自明デアル.

次ニ R ノ部分集合 $\mathfrak{I}$ デ條件

1°. $A, B \in \mathfrak{I}$ ノトキニ $\alpha A+\beta B \in \mathfrak{I}$ デアル.

2° R ノ任意ノ要素 A ニ對シテ $\mathfrak{I}A \subseteqq \mathfrak{I}$ デアル.

ヲ滿足スルモノヲ右 *algebraic ideal* ト云ヒ, 同様ニ左 *algebraic ideal*, 両側及ビ片側 *algebraic ideal* ヲ定義スル. 更ニ, コレ等ノ *ideal* ノ中デ *uniform topology* ニ關シテ閉ヂタモノヲ右 *ideal*, 両側 *ideal* 等ノ様ニ *algebraic* ト云フ形容詞ヲ除イテ呼ブコトニスル。

R ノ右 (左又ハ両側) ノ (*algebraic*) *ideal* デ (0) 及ビ R ト異ナリ, 夫レヲ含ム右 (左又ハ両側) ノ (*algebraic*) *ideal* ガ R ノミノモノヲ右 (左又ハ両側) ノ最大 (*algebraic*) *ideal* ト名付ケル。スルト次ノ定理ガ得ラレル。

定理 2　R ヲ代数的單位要素ヲ有スル *uniformly complete normed ring* トスルトキニ, R ノ右 (左又ハ両側) ノ最大 *algebraic ideal* ハ *uniform topology* ニ關シテ閉ヂテ居ル. 従ッテ夫レハ R ノ右 (左又ハ両側) ノ最大 *ideal* デアル。又, R ノ任意ノ右 (左又ハ両側) ノ *algebraic ideal* ヲ含ム右 (左又ハ両側) ノ最大 *ideal* ガ存在スル。

証明. $\mathfrak{N}$ ヲ R ノ右ノ最大 ideal トスルトキニハ R ノ代數的正則要素ノ全体カラナル集合 $\mathfrak{G}$ ニ對シテ $\mathfrak{N} \leqq R - \mathfrak{G}$ デアル。トコロデ，定理1ヨリ $R - \mathfrak{G}$ ハ uniform topology ニ関シテ閉ヂテ居ルカラ，$\mathfrak{N}$ ノ uniform topology ニ關スル閉被 $\overline{\mathfrak{N}}$ ハ $R - \mathfrak{G}$ ニ含マレ，從ツテ $\overline{\mathfrak{N}} \neq R$ デアル。

然ルニ、$\overline{\mathfrak{N}}$ ハ右ノ ideal デアル。何トナレバ，$\mathfrak{N}$ ハ R ニ於イテ linear デアルカラ $\overline{\mathfrak{N}}$ モ亦 R ニ於イテ linear デアル。次ニ，$A \in R$ ニ對シテ $B \in \overline{\mathfrak{N}}$ ヲ考ヘル. $B \in \mathfrak{N}$ デアレバ，$BA \in \mathfrak{N} \leqq \overline{\mathfrak{N}}$ トナル。$B \in \overline{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N}$ デアレバ，$B_n \in \mathfrak{N}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ求メテ $B_n \to B$ uniformly ト出来ル。從ツテ，$B_n A \to BA$ uniformly が得ラレ $BA \in \overline{\mathfrak{N}}$ デアル。即チ，$\overline{\mathfrak{N}}$ ハ右ノ ideal デアル。

此処デ $\mathfrak{N} \leqq \overline{\mathfrak{N}} \neq R$ デアルカラ，$\mathfrak{N}$ ノ最大性ヨリ $\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{N}}$ トナル。即チ，$\mathfrak{N}$ ハ uniform topology ニ関シテ閉ヂテ居ル. 左及ビ両側ノ最大 ideal ニツイテモ同様デアル。

次ニ，右(左又ハ両側) ノ algebraic ideal ヲ含ム右(左又ハ両側) ノ最大 ideal ノ存在ハ R ノ連續性ニ関係ナク代數的ニ証明サレルカラ，此処デハ夫レヲ省ク.

(証明完了)

今，最大 ideal ノ一ツノ利用トシテ正則要素ノ存

在ニ關スル次ノ系ヲ與ヘテ置カウ。

系. Rヲ（代數的）單位要素ヲ有スル uniformly complete normed ring トスルトキニ，$A \in R$ ガ（代數的）正則要素デアルガタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ A ガ右及ビ左ノ最大 ideal ニ含マレナイコトデアル。

次ニ，$\mathfrak{N}$ヲRノ兩側 ideal トスルトキニ，$A-B \in \mathfrak{N}$ デアレバ $A \equiv B \pmod{\mathfrak{N}}$ ト書キ A, B ハ$\mathfrak{N}$ヲ法トシテ合同デアルト云フ。スルト，$A \equiv A'$, $B \equiv B' \pmod{\mathfrak{N}}$ ヨリ $A+B \equiv A'+B'$, $AB \equiv A'B' \pmod{\mathfrak{N}}$ ガ得ラレル。又，$\mathfrak{N}$ヲ法トシテ A ト合同ナル要素ノ集合ハ uniform topology ニ關シテ閉ヂテ居ルガ、コレヲ$\mathfrak{N}$ヲ法トスル剩餘類ト呼ビ $\mathfrak{R}_A$ ニテ示ス。其處デ

$$|\mathfrak{R}_A| = \inf_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}_A} |\mathfrak{X}|$$

トスレバ，次ノコトガ云ハレル。

1° $|\mathfrak{R}_A| \leqq |A|$

2° $|\alpha \mathfrak{R}_A| = |\alpha| |\mathfrak{R}_A|$

3° $$|\mathfrak{R}_A + \mathfrak{R}_B| = \inf_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{R}_A + \mathfrak{R}_B} |\mathfrak{X}| = \inf_{Y \in \mathfrak{R}_A,\, Z \in \mathfrak{R}_B} |Y+Z|$$

$$\leqq \inf_{Y \in \mathfrak{R}_A} |Y| + \inf_{Z \in \mathfrak{R}_B} |Z| = |\mathfrak{R}_A| + |\mathfrak{R}_B|$$

4° $|\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_B| = \inf_{X\in\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_B}|X| = \inf_{Y\in\mathfrak{R}_A,\, Z\in\mathfrak{R}_B}|YZ|$

$$\leqq \inf_{Y\in\mathfrak{R}_A}|Y| \inf_{Z\in\mathfrak{R}_B}|Z| = |\mathfrak{R}_A||\mathfrak{R}_B|$$

5° $|\mathfrak{R}_A| = 0$ トスレバ, $X_n \in \mathfrak{R}_A \ (n=1,2,\cdots\cdots)$,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$$

ヲ滿ス X_n ガ存在スル。然ルニ, $X\in\mathfrak{R}_A$ ニ對シテ $X - X_n \in \mathfrak{N} \ (n=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ $\lim_{n\to\infty}(X - X_n) = X$ ハ $\mathfrak{N}$ ニ含マレ $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{N}$ ガ得ラレル。

1°—5° ヨリ剰餘類ノ全体ノ作ル集合ハ再ビ normed ring ヲナスコトガ判ル. コレヲ R ノ $\mathfrak{N}$ ヲ法トスル剰餘類環ト云ヒ, $R/\mathfrak{N}$ デ示ス. 此ノ環ニ就イテ更ニ次ノコトガ成立スル。

6° R ガ單位要素 E ヲ有ストキニハ, $\mathfrak{R}_E$ ハ $R/\mathfrak{N}$ ノ單位要素デアル。

何トナレバ, $\mathfrak{R}_E$ ハ $R/\mathfrak{N}$ ノ代數的單位要素デアルカラ $|\mathfrak{R}_E| \geqq 1$ ガ得ラレル。トコロデ, 1° ニ依ッテ $|\mathfrak{R}_E| \leqq |E| = 1$ デアルカラ $|\mathfrak{R}_E| = 1$ ガ成立ツ。即チ $\mathfrak{R}_E$ ハ $R/\mathfrak{N}$ ノ單位要素デアル。

7° R ガ uniformly complete デアレバ, $R/\mathfrak{N}$ ハ又サウデアル。

証明．$\{\mathfrak{R}_{A_n}\}$（$n=1,2,\cdots\cdots$）ヲ考ヘル．$\varepsilon>0$ニ對シテNヲ選ンデ$n, m \geqq N$ノ時ニ

$$|\mathfrak{R}_{A_n}-\mathfrak{R}_{A_m}|<\varepsilon$$

デアル様ニナシ得タトスル．スルト，部分列$\{\mathfrak{R}_{B_n}\}$（$n=1,2,\cdots\cdots$）ヲ選ンデ$\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{R}_{B_n}-\mathfrak{R}_{B_{n+1}}|<+\infty$ト出来ル。トコロデ，$X_1 \in \mathfrak{R}_{B_1}$ニ對シテ$X_2 \in \mathfrak{R}_{B_2}$ヲ選ンデ

$$|X_1-X_2| \leqq 2|\mathfrak{R}_{B_1}-\mathfrak{R}_{B_2}|$$

ト出来ル．同様ニ$X_3 \in \mathfrak{R}_{B_3}$ヲ定メテ

$$|X_2-X_3| \leqq 2|\mathfrak{R}_{B_2}-\mathfrak{R}_{B_3}|$$

ト出来ル．コノヤウニシテ$\{X_n\}$（$n=1,2,\cdots\cdots$）ヲ決定スレバ，$\sum_{n=1}^{\infty}|X_n-X_{n+1}| \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty}|\mathfrak{R}_{B_n}-\mathfrak{R}_{B_{n+1}}|<+\infty$デアルカラ，$\{X_n\}$（$n=1,2,\cdots\cdots$）ハ Cauchy 列デアル．従ッテ假定ヨリ$\lim_{n\to\infty}X_n=X$ガ存在スル。トコロデ，$X$ノ屬スル剰餘類$\mathfrak{R}_X$ニ對シテ$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{R}_{B_n}=\mathfrak{R}_X$ガ得ラレ，又$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{R}_{A_n}=\mathfrak{R}_X$トナル．　（証明完了）

今，Rト$R/\mathfrak{N}$トノ關係ヲ考ヘルタメニR_1ヲR_2ノ上ニ寫ス open uniformly homomorphism $\varphi(t)$ヲ取ル．R_1ノ要素Xデ$\varphi(X)=0$ヲ満足スルモノカラナル集合ヲ$\mathfrak{N}$トスレバ，$\mathfrak{N}$ハR_1ノ両側 ideal デアル．其処デ，$\mathfrak{N}$ヲ法トスルR_1ノ剰餘類$\mathfrak{R}_A$トR_2ノ要素$\varphi(A)$

トヲ對應セシメルト，$R_1/\mathfrak{N}$ト$\varphi(R_1)$トノ間ノ代數的同型寫像ガ得ラレル．今，コレガ兩側連續ナルコトヲ示サウ。$\varphi(t)$ハ連續デアルカラ、$A \in R_1$ト$\varepsilon>0$トニ對シテ$\delta>0$ヲ求メテ$|A-X|<\delta$ノトキニ$|\varphi(A)-\varphi(X)|<\varepsilon$トナシ得ル．然ルニ，$|A-X|<\delta$ノトキニハ$|\mathfrak{R}_A-\mathfrak{R}_X|<\delta$デアッテ、シカモ逆ニ$|\mathfrak{R}_A-\mathfrak{R}_X|<\delta$ノトキニハ$|A-X'|<\delta$ヲ滿ス$X'$ガ$\mathfrak{R}_X$ニ含マレ$\mathfrak{R}_{X'}=\mathfrak{R}_X$デアル．夫レ故ニ$\mathfrak{R}_A=\varphi(A)$ヲ對應セシメル寫像ハ連續デアル。

次ニ、$\varphi(A)$ハ open デアルカラ，$A \in R_1$ト$\varepsilon>0$トニ對シテ$|A-X|<\varepsilon$ヲミタスXノ集合ノ$\varphi(t)$ニ關スル像ハR_2デ open デアル．從ッテ$\delta>0$ヲ求メテ$|\varphi(A)-\varphi(X)|<\delta$ヲ滿タス$\varphi(X)$ガ今考ヘタ兩集合ニ含マレルヤウニ出來ル．夫レ故ニ$|\varphi(A)-\varphi(X)|<\delta$ノトキニハ$\varphi(X)$ノ原像$X$デ$|A-X|<\varepsilon$ヲ滿スモノガアル．トコロデ$|A-X|<\varepsilon$ノトキニ$|\mathfrak{R}_A-\mathfrak{R}_X|<\varepsilon$デアルカラ，$\varphi(A)$ヲ$\mathfrak{R}_A$ニ寫ス寫像モ亦連續デアル．從ッテ$R_1/\mathfrak{N}$ト$\varphi(R_1)$トハ *uniformly isomorphic* デアル．即チ

定理3. *Normed ring* R_1ヲR_2ノ中ニ寫ス *open uniform homomorphism* $\varphi(t)$ニ對シテ$\varphi(X)=0$ヲ滿スXノ集合ヲ$\mathfrak{N}$トスレバ，$\mathfrak{N}$ハR_1ノ兩側 *ideal* デアッテ、$R_1/\mathfrak{N}$ハ$\varphi(R_1)$ト *uniformly isomorphic* デアル。

トコロデ、R_K ($K=1,2$) ガ共ニ uniformly complete ノトキニハ定理3ニ於ケル $\varphi(t)$ ノ條件ヲ uniform homomorphism デ置キ換ヘ得ル。即チ

定理4. R_K ($K=1,2$) ヲ uniformly complete normed ring トスルトキニ、R_1 ヲ R_2 ノ上ニ寫ス uniformly homomorphism $\varphi(t)$ ニ對シテ $\varphi(\mathfrak{X})=0$ ヲ滿ス $\mathfrak{X}$ ノ集合ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ、$\mathfrak{N}$ ハ R_1 ノ兩側 ideal デアッテ、$R_1/\mathfrak{N}$ ハ $\varphi(R_1)$ ト uniformly isomorphic デアル。

此ノ定理ノ證明ハ補助定理2ヲ利用スレバヨイ。

次ニ、R デ $0, R$ 以外ニ右（左又ハ兩側）ideal ヲ含マナイモノヲ右（左又ハ兩側）單純ト呼ブ。右（左又ハ兩側）單純 ideal モ同様ニ定義スル。スルト、次ノ定理ガ得ラレル。

定理5. $\mathfrak{N}$ ヲ normed ring R ノ兩側最大 ideal トスレバ、$R/\mathfrak{N}$ ハ兩側單純デアル。

證明. $R/\mathfrak{N}$ ガ兩側單純デナケレバ、コレハ $0, R/\mathfrak{N}$ ト異ナル兩側 ideal ヲ含ム。其ノ一ツヲ $\mathfrak{M}$ トスルトキニ、R ノ要素 A デ $\mathfrak{N}$ ヲ法トスル R ノ剩餘類 $\mathfrak{K}_A$ ガ $\mathfrak{M}$ ニ含マレルヤウナモノカラナル集合ヲ $\mathfrak{J}$ トスレバ、$\mathfrak{N} < \mathfrak{J} \neq R$ デアル。トコロデ、$\mathfrak{J}$ ハ R ノ兩側 ideal デアル。即チ、$A \in \mathfrak{J}$, $B \in R$ ノトキニ $\mathfrak{K}_A \mathfrak{K}_B = \mathfrak{K}_{AB}$,

$\tilde{R}_B\tilde{R}_A = \tilde{R}_{BA}$ ハ共ニ $\mathfrak{M}$ ニ含マレルカラ、AB, BA ハ共ニ $\mathfrak{J}$ ニ含マレ、$\mathfrak{J}$ ハ両側 algebraic ideal デアルガ、更ニ $\mathfrak{J}$ ハ R ニ於イテ uniform topology ニ関シテ閉デテ居ル。何トナレバ、$A \rightarrow \tilde{R}_A$ ノ寫像ハ uniform topology ニ関シテ連續デ、シカモ $\mathfrak{M}$ ハ $R/\mathfrak{M}$ ニ於イテ uniformly closed デアルカラデアル。コレハ $\mathfrak{M}$ ノ定義ニ矛盾スル。夫レ故ニ $R/\mathfrak{M}$ ハ両側單純デアル。

（證明完了）

今、normed ring R ノ凡テノ両側最大 ideal ノ共通部分ヲソノ根基ト呼ビ、夫レガ 0 デアルモノヲ準單純ト呼ブコトニスル。$\mathfrak{M}$ ヲ R ノ両側最大 ideal トスレバ定理 5 ニヨッテ $R/\mathfrak{M}$ ハ両側單純デアル。其処デ、此樣ナ両側單純環ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ トシ、A (∈ R) ノ含マレル $R/\mathfrak{M}$ ノ剰餘類ヲ $A_{\mathfrak{M}}$ デ示スコトニスル。スルト、R ノ各要素 A ニハ $\mathfrak{M}$ ニテ定義セラレ、$R/\mathfrak{M}$ デ $A_{\mathfrak{M}}$ ヲ値トスル函數 —— $Ⓗ_A$ ニテ示ス —— ガ對應スル。其処デ $Ⓗ_A$ ノ全体カラナル集合ヲ $\mathcal{R}$ トシ、$Ⓗ_A$ ノ絶對値 $|Ⓗ_A|$ ヲ

$$|Ⓗ_A| = \sup_{\mathfrak{M}} |A_{\mathfrak{M}}|$$

デ示セバ、$\mathcal{R}$ ハ normed ring トナル。トコロデ

$$Ⓗ_A \pm Ⓗ_B = Ⓗ_{A\pm B}, \quad Ⓗ_A Ⓗ_B = Ⓗ_{AB}, \quad \alpha Ⓗ_A = Ⓗ_{\alpha A}$$

ガ成立チ、シカモ R ノ準單純性ヨリ A ト $Ⓗ_A$ トノ對應ハ一對一デアル。即チ、R ト $\mathcal{R}$ トハ代數的同型デアル。コレガ準

單純環ノ兩側單純環ノ直和ヘノ分解デアルガ、此處デ種々ノ問題ガ起ル、例ヘバ $A \longleftrightarrow H_A$ ノ對應ノ連續性ノ問題ガアル. $\mathfrak{K}$ ガ *uniformly complete* デアレバ, 此ノ對應ハ *uniformly isomorphism* トナルガ、一般ノ場合ハドウデアラウカ。又 $\mathfrak{N}$ ニハ如何ナル *topology* ヲ導入スベキデアルカ。更ニ準單純性ト兩側完全可約性トノ關係ハドウデアラウカ。

(西大 二三六八)