

1100. 代數曲線 / Uniformisation = ツイテ

有馬 喜八郎 (阪大)

$f(x, y) = 0$ 7 geschlecht $p + n$ 代數曲線
トス。

$p \geq 2$ + ルトキ 全平面で有理型 + 函数 $x = g(t)$,
 $y = h(t) = \tau$ uniformisation スルコトハ出来
イ。

コレハ Picard ノ定理デ, コノ系トシテ Picard
ノ除外値定理ガ出テ来ルコト等ハヨク知ラレタコトデ
ス。

以下コレニ関シテ述ベラミタイト思ヒマス。

得ラレタ結果ハ大部分ハ知ラレタモノデ, 又証明法モ殆
ンド既知ノ方法デス。

第一章ハ Ahlfors, Schwarz, Lemma ヲ利
用シ⁽¹⁾, 第二章ニテ Nevanlinna 流ノ方法ヲ述ベタ
イト思ヒマス, 又第一章ハ第二章へノ準備モ兼ねテイマス。

第 一 章

1. $f(x, y) = 0$ ノ geschlecht p . + ν 代数曲線
トシテ Riemann 面ヲ R トス。

R 上ノ g 個ノ点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g = \tau$ 夫々 $(m_i, 1)$ (i
 $= 1, 2, \dots, g$) + ν 對應ヲ + ν 如ク單位円 $|z| < 1$ = 寫

(1) Ahlfors. An extension of Schwarz's Lemma
(Trans. Amer. Math. Soc. 43. 1935)

R. M. Robinson: A generalization of Picard's
and related theorems (Duke. Math. Journ. 5. 1939)

像スル $(p, q, m, \dots, m q) + i\pi$ Automorphic function
 $\tau z = \zeta(x, y)$ トス。

$$\bar{u} = \log \frac{\left| \frac{dz}{dz} \right|}{1 - |z|^2}$$

トオケバ

$$\Delta_x \bar{u} = 4e^{2\bar{u}} \dots \dots \dots (1)$$

但シ Δ_x ハ $x =$ 關スル Laplacian

$x = g(t), y = h(t)$ ヲ $|t| < R =$ テ有理型函数トシ

$z = \zeta(g(t), h(t)) = \tau t$ イテ

$$u = \log \frac{\left| \frac{dz}{dz} \right| \left| \frac{dx}{dt} \right|}{1 - |z|^2} = \log \mathbb{W}$$

トスレバ, $u = \bar{u} + \log \left| \frac{dx}{dt} \right|$ ト (1) トヨリ

$$\Delta_t u = 4e^{2u} \dots \dots \dots,$$

以後記述ヲ簡單ニスルヲ

$$\Delta u = 4e^{2u} \dots \dots \dots (2)$$

トシマス。

② $f(x, y) = 0 =$ birational transformation
 ヲ施シ以下ニテハ R ノ無限遠点ハ分岐点ニテラズ, 又 ζ
 ノ分岐点ハ R ノ無限遠点スル分岐点ト一致セバト假定シ
 マス。

以下 \bar{u} ノ性値ニツイテ各段ニ分ツテ考ヘマス。

(I) R スル ζ ノ m 次ノ分岐点 $(x, y) = (a, b) =$
 於テハ

$$\zeta = d_0 + d_1 \sqrt[m]{x-a} + d_2 (\sqrt[m]{x-a})^2 + \dots$$

トスレバ

$$\bar{u} = \frac{1-m}{m} \log|x-a| + U(x)$$

$U(x)$ は $x=a$ の近傍ニテ有界な函数ヲ表ハス。トシマス。

以下ニテモ同様デス。

(II) $\zeta(x, y)$ の無限次ノ分岐点ニテハ

$$\bar{u} = -\log|x-a| - \log_2|x-a| + U(x)$$

(III) R の無限遠点ニテ

$$\zeta(x, y) = d_0 + \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \dots$$

コリ

$$\bar{u} = -2 \log|x| + U(x)$$

コト他ノ点ニテハ \bar{u} は regular デス。

③ Ahlfors, Schwarz, Lemma = ツイテハ前註ノ論文ヲ参照シテ戴クコト = シテ簡單ニ記載シマス。

Riemann 面上ニ $|ds| = \lambda |dt|$ ナル Riemann metrique ヲ為シ $\log \lambda = v$ トス。

若シ $\Delta v \geq 4e^{2v}$ = シテ λ が $|t| < 1$ = テ finite

ナラバ

$$|ds| \leq d\sigma$$

$$\text{但し } d\sigma = \frac{|dt|}{1-|t|^2}$$

以下 Ahlfors の定理を利用シテ 三ノ結果ヲ出シテ
ミタイト思ヒマス。(コレニツイテハ Robinson ノ論文ヲ
参照サレタシ)

④ ②ノ(2)ヨリ u ハ

$$\Delta u = 4e^{2u}$$

$u = \log w$ トレ $w = \text{ツイテ考ヘル}$ 。

ζ ノ ∞ ノ ordnung ノ分岐点 (a, b) ノ $g(t) = a$,
 $h(t) = b$ トナラヌトキハ考ヘルヲ要シマセン。

R ノ ζ ノ m 次ノ分岐点ニツイテ考ヘマス。

先ツ R ノ m 次ノ分岐点ニツイテ

$(x, y) = (a, b)$ ノ分岐点トシマス。 $x = a = g(t_0)$

トスレバ

$$x - a = g(t) - a = d_0 (t - t_0)^{km} (1 + \bar{g}(t)) \dots (3)$$

$\bar{g}(t)$ ノ $t = t_0$ ノ正則且ツ $\bar{g}(t_0) = 0$ ナル函数トス。

$$w = e^u = e^{\bar{u}} \left| \frac{dx}{dt} \right|$$

ヨリ ②ノ(I)ノ \bar{u} ト(3)ヲ用ヒテ

$$w = |t - t_0|^{k-1} S(t)$$

$S(t)$ ノ $t = t_0$ ノ有界ノ函数ヲ表ス 以下同様。

故ニ w ノ $t = t_0$ ノ $k \geq 1$ ナル故 finite = ナル。

次ニ

ζ , m 次, 分岐点 = t_0

$$g(t) - a = \alpha (t - t_0)^{m'} + \dots$$

トスレバ

②, (II) フ用ヒテ

$$w = |t - t_0|^{\frac{m' - m}{m}} S(t)$$

故 = $m' \geq m$ + ラバ w の finite = +ル.

∞ の無限遠点 = t_0

$$g(t) = \frac{\alpha}{(t - t_0)^{m'}} + \dots$$

トスレバ

$$w = |t - t_0|^{m' - 1} S(t)$$

故 = $m' \geq 1$ + ラバ w の finite = +ル. 実際 = $m' \geq 1$ +リ, 故 = 上, 結果ト Ahlfors の定理ヨリ次, 結果ヲ得.

$x = g(t)$, $y = h(t)$ が \mathbb{R} 上, α_i ヲ m_i 以上, order α_i トスレバ

$$\frac{\left| \frac{dz}{dx} \right| \left| \frac{dx}{dt} \right|}{|1 - |z|^2|} |dt| \leq \frac{|dt|}{1 - |t|^2} \dots \dots (4)$$

が成立ス.

但シ $m_i = \infty$ / トキハ α_i ヲ ∞ トス.

但シ $\zeta(x, y) = z$ が (p, q, m_1, \dots, m_q) +ル

Automorphe function +ルヲ \times =ハ

$$2p-2 + \sum_{i=1}^g \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0 \dots\dots\dots (5)$$

が必要なり。

上ノ結果ヲ

$|t| < R$ + ルトキハ

$$\frac{\left| \frac{dz}{dx} \right| \left| \frac{dx}{dt} \right|}{1 - |z|^2} \leq \frac{R}{R^2 - |t|^2} \dots\dots\dots (4')$$

⑤ 上ノ結果ヨリ種々ノ結果ガ得ラレマス。

$x = g(t)$ ガ有理型函数 (全平面ニ於テ) + ルトキハ

$$x = g(t), \quad y = g(t)$$

トシ

$$f(x, y) = x - y = 0$$

ト考ヘレバ $p=0$ トオイテヨク知ラレタ Picardノ定理ガ得ラレマス。然レコレ等ハ省略シテニ、三ノ結果ノニニ應用シテミス。

定理1. $f(x, y) = 0$ ノ $p \geq 2$ + ル代数曲线トスレバ $x = g(t), y = h(t)$ + ル全平面ヲ有理型ノ函数ニテ Uniformisation デキナリ。

(証) 必要ナラバ $f(x, y) = 0 = \text{birational transformation}$ ヲ施シテ今マテノ假设ニテ一般性ヲ失ハナリ。今定理ガ成立シナイトスレバ $g=0$ トシ

$$2 \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) = 0 \quad 2p-2 \geq 2 > 0$$

故 = (4), 条件が成立ス。

故 = (4)' = 於テ任意 = t ヲ固定シ $R \rightarrow \infty$ トスレバ

$$\frac{\left| \frac{dz}{dx} \right| \left| \frac{dx}{dt} \right|}{1 - |z|^2} = 0$$

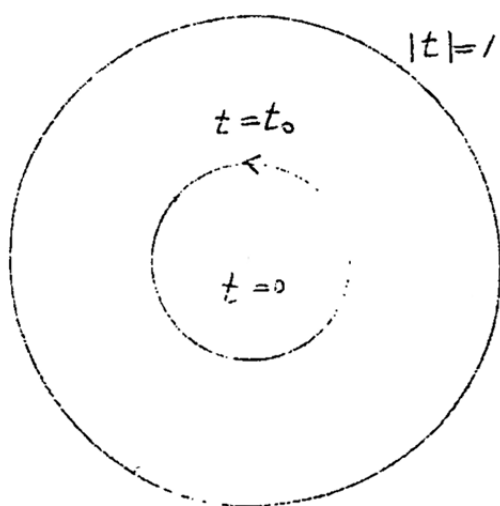
故 = x の殆んどスベテ, $t = \text{ツイテ}$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

故 = x の常数トナリ 假設 = 反ス。

定理 2. $f(x, y) = 0$ の $p \geq 2$ + ル代数曲線トス。
 $x = g(t), y = h(t)$ テ uniformisation テキ
 ルトスレバ $x = g(t)$, singular point の iso-
 lated singular point テハアリ得テイ。

(証) $|t| < 1 = \text{テ } t=0$, ミガ singular point
 トス。



$w = -i \log t$ + ル変換ヲ施
 スト $|t| < 1$, $J(w) > 0$ +
 ル半平面 = 移ル。

$|t_0| - \rho < \epsilon$ + ル如ク (ϵ ハ
 任意ノ非常 = 小ノサイ数トス)

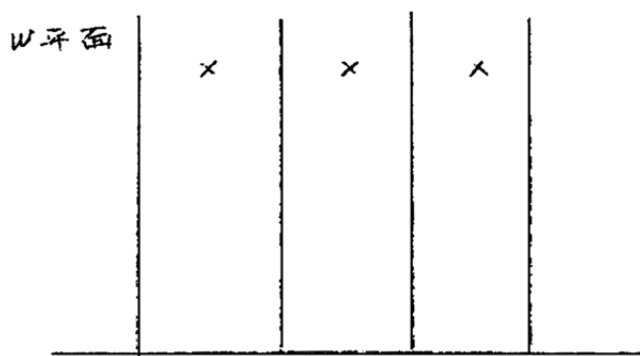
t_0 ヲトリ

t_0 ヲリ t 7 $|t| = \rho$ + ル円

周上ヲ正ノ方向 = 動カスト w , $J(w) = -\log \rho$ + ル直
 線上動ク。

$q=0, p \geq 2$ トスレバ (5) が成立ス。

t 平面ノ際リ w 平面ヲ考ヘル。且ツ半平面ノ非ユークリッド



$$\text{element } \gamma \frac{|dt|}{R^2 - |t|^2}$$

換リニ用ヒレバ (4)' ハ又ハ
リ成立ス。

$$g(t_0) = a, h(t_0) = b$$

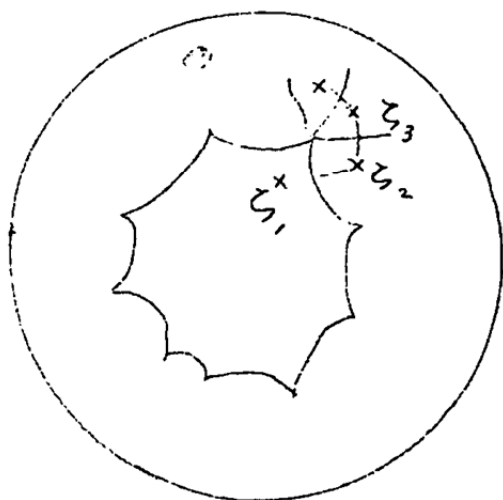
トス。

t が t_0 ヨリ $|t| = \rho$ ヲ動イテ $t_0 = \text{帰ルゴト} = \zeta(x, y)$
ハ $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ ト変ル。

(4) ヲ

$$\int \frac{|\frac{dz}{dx}| \cdot |\frac{dx}{dt}|}{1 - |z|^2} |dt| \leq \int \frac{1}{\mathcal{J}(w)} |dw|$$

$$z = \zeta(x, y)$$



ヨリ $N \cdot E |\zeta_1 - \zeta_2| = \tau \zeta_1, \zeta_2$
ノ非ユークリッド的長サヲ表ハ
スモノトスレバ $N \cdot E |\zeta_1 - \zeta_2| =$
 $N \cdot E |\zeta_2 - \zeta_3| = \dots$

$$\leq \int \frac{1}{-\log \rho} |dw| = -\frac{2\pi}{\log \rho}$$

ρ が充分小サイトキ上式ヨリ

$N \cdot E |\zeta_i - \zeta_{i+1}|$ ハ充分小サイ。

故ニ $|\zeta_i - \zeta_{i+1}|$ ハ充分小サイ。

故ニ ζ_1, ζ_2, \dots ハ楕圓的, 又ハ拋物線的ノ固定点ノマツ

のノルコトニナル。然レ $\zeta(x, y)$ ハ $(p, 0)$ ナル函数故
カノ固定点ヲ有セズ。

従ツテ $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \dots$ トナルヨリ外ハナシ。

故ニ p ガ小ナルトキ $t = t_0$ ヨリ t ガ $|t| = p$ ナル動ク
キ $\zeta = \zeta(x, y)$ ハ充分小ナリ開曲線ヲ画ク故ニ $p \rightarrow 0$ ナ
ルトキ $\zeta(x, y)$ ハ或ル値ニ收斂シ、従ツテ $g(t), h(t)$
ハ或ル値ニ收斂シ従ツテ Riemann ノ定理ニヨリ
 $g(t), h(t)$ ハ $t=0$ ナル正則点ナリ極トシテ有スルコトニ
ナリ 假設ニ反ス。

(注意) 定理 2 ノ証明ガ割合ニ簡單デス、デ或ハ独断的ナ
点ガアルノデハナイカト恐レテ居マス。御教示ヲ願ヒマス。
定理ノノモハ正シイノデス。

$x = g(t), y = h(t)$ ハ *isolated singular point* ナ
リコトハ分ツテイル、デスガ然ラバ如何ナル
集合ニナルカ問題ハアルコトニ思ヒマス。殆ンド手掛リヲ
得マセンガ、他日発表出来タラト希望致シテ居ル次第デス。

辻先生、数物會ニ於ケル *Piikerschmitt's theorems*
ニ關スル *limit point* ノ集合ニ關スル定理ハ、ノ、或ル
方面ニ於ケル暗示ヲ與ヘルモ、デハナイカト思ヒマス。

(續ク)