1098. Abstract Hilbert space ノ順序付ケ

中野　秀五郎(東大)

abstract L_2-space ガ Hilbert space デアルコトハ其ノ表現カラ容易ニ知ラレルコトデアリマス。此処デハ，逆ニ abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$ ニ semi-order ヲ付ケテ L_2-space トスルコトヲ考ヘテミマセウ。

$\mathfrak{H}$ ハ勿論 real Hilbert space トシ、以下簡単ノタメ separable トシマスガ、勿論 non-separable ノ場合ニモ拡張出来マス。

$\mathfrak{H}$ ニ semi-order ガ付イテ L_2-space $\mathfrak{L}_2$ ニナッタトシマスト、$\mathfrak{L}_2$ ニ於ケル Projektor ハ $\mathfrak{H}$ ニ於ケル Projektionsoperator トナリマス。如何トナレバ、P ヲ Projektor トスレバ、$x \in \mathfrak{L}_2$ ニ対シテ $P^2x = Px$, 又 $x, y \in \mathfrak{L}_2$ ニ對シテハ

$$(Px, y) = \frac{1}{2}\left\{\|Px+y\|^2 - \|Px\|^2 - \|y\|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\|Px+Py\|^2 + \|(1-P)y\|^2 - \|Px\|^2 - \|y\|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\|Px+Py\|^2 - \|Px\|^2 - \|Py\|^2\right\}$$

$$= (Px, Py) = (x, Py)$$

トナリマスカラ，P ハ $\mathfrak{H}$ ニ於ケル Projektionsoperator

デアリマス。然シ逆ニ $\mathfrak{Y}$ ノ Projektionsoperator ハ必ズシモ $\mathcal{L}_2$ ノ Projektor デナイコトハ $\mathcal{L}_2$ ノ Projektor ノ全体ガ commutative デアルコトカラ明ラカデアリマス。今 $\mathcal{L}_2$ ノ Projektor ノ全体ヲ $\mathfrak{P}$ トシマスト、$\mathfrak{P}$ ハ $\mathfrak{Y}$ ニテハ Projektionsoperator ノ Ring トシテ einfach デアリマス。(H. Nakano: Unitärinvarianten im allgemeinen Euklidischen Raum, Math. Annalen. 118, 1941 ヲ参照)

即チ $\mathfrak{P}$ ノ何レノ Projektionsoperator トモ commutative ナ $\mathfrak{Y}$ ノ Projektionsoperator ハ $\mathfrak{P}$ ニ属シマス。如何トナレバ，Q ヲ $\mathfrak{P}$ ト commutative ナ Projektionsoperator トシマスト，Q ハ $\mathcal{L}_2$ ニ於ケル Dilatator デアリマシテ，$Q^2=Q$ ナルコトカラ Q ガ Projektor ナコトガ知ラレマス。(H. Nakano Teilweise geordnete Algebra，輯報 17，1941 参照)

[定理] $\mathfrak{P}$ ヲ $\mathfrak{Y}$ ノ einfach ナ Projektionsoperator ノ Ring トシマスト、$\mathfrak{Y}$ ノ elements ノ間ニ teilweise Ordnung ヲ與ヘテ L_2-Modul トシ，L_2 ノ Projektor ノ全体ガ $\mathfrak{P}$ トナルヤウニスルコトガ出来マス。

[証明] $\mathfrak{Y}$ ガ separable ナノデ $\mathfrak{Y}$ ノ element v

ヲ適當ニトルト、$\mathfrak{P}$ ノスベテノ $P \neq 0$ ニ對シテ $Pv \neq 0$ ナラシメルコトガ出來マス。又 $\mathfrak{P}$ ガ einfach デスカラ $\{Pv\}$ ($P \in \mathfrak{P}$) ガ $\mathfrak{H}$ ニテ überall dicht デアリマス。(H. Nakano: Unitärinvarianten ......, 參照)

$\mathfrak{H}$ ノ element x ニ對シテ

$$(x, Pv) \geqq 0 \quad \text{for all } P \in \mathfrak{P}$$

ナル時 $x \geqq 0$ トシマス。然ル時ハ明カニ

1) $x \geqq 0$ ニテ $y \geqq 0$ ナラバ $x + y \geqq 0$

2) $x \geqq 0$, $x \leqq 0$ ナラバ $x = 0$ (如何トナレバ $\{Pv\}$ ハ überall dicht in $\mathfrak{H}$ デアルカラ)

又 $x - y \geqq 0$ ナルトキ $x \geqq y$ トスレバ、コレデ $\mathfrak{H}$ ハ semi-ordered トナリマス。次ニ此レガ lattice デアルコトヲ証明シマセウ。ソレニハ $x_+ = x \cup 0$ ノ存在ヲ証明スレバ充分デアリマス。今

$$\alpha = \sup_{P \in \mathfrak{P}} (x, Pv)$$

ト置ケバ、α ハ finite デアリマス。($|(x, Pv)| \leqq \|x\| \cdot \|v\|$)

任意ノ正數 ε ニ對シテ

$$(x, Pv) > \alpha - \varepsilon \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

ナル P ガ存在シマス。又

$$(x, Qv) > \alpha - \delta \qquad (Q \in \mathfrak{P},\ \delta > 0)$$

トシマスト、$PQ \in \mathfrak{P}$ デ從ッテ $(x, PQv) \leqq \alpha$ デスカ

ラ

$$(x, (P+Q)v) = (x, Pv) + (x, Qv) - (x, PQv)$$
$$> \alpha - (\varepsilon + \delta)$$

トナリマス。故ニ

$$(x, P_n v) > \alpha - \frac{1}{2^n} \qquad (P_n \in \mathfrak{P},\ n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

トナルヤウナ P_n ニ對シテ

$$P_n' = P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots$$

ト置ケバ、$P_n' \in \mathfrak{P}$ ニテ、且ツ上述ニヨリ

$$(x, P_n' v) \geqq \alpha - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots\cdots \right) = \alpha - \frac{1}{2^{n-1}}$$

デアリマス。又 $P_1' \geqq P_2' \geqq \cdots\cdots$ デアリマスカラ

$$P_0 = \lim_{n \to \infty} P_n'$$

ト置ケバ，從ツテ

$$(x, P_0 v) \geqq \alpha, \quad P_0 \in \mathfrak{P}$$

トナリマス。又一方 $(x, P_0 v) \leqq \alpha$ ナルベキデスカラ

$$(x, P_0 v) = \alpha$$

デナケレバナリマセン。然ルトキハ此ノ P_0 ニ對シテ $P \in \mathfrak{P}$ ナレバ

$$(P_0 x - x, Pv) = (x, P_0 P v) - (x, Pv)$$
$$= (x, P_0 v) - (x, (P + P_0) v)$$

然ルニ $P_0 \dotplus P \in \mathfrak{P}$ ニテ $(x, (P + P_0) v) \leqq \alpha$ ナルベキニ

ヨリ

$$(P_0 x - x, Pv) \geqq 0$$

従ッテ，$P_0 x \geqq x$ デアリマス。又一方 $P \in \mathfrak{P}$ ニ對シテ

$$(P_0 x, Pv) = (x, P_0 v) - (x, (P_0 - P_0 P) v)$$

ニテ，$P_0 - PP_0 \in \mathfrak{P}$ ナルニヨリ，$(x, (P_0 - P_0 P) v) \leqq \alpha$

故ニ

$$(P_0 x, Pv) \geqq 0$$

従ッテ $P_0 x \geqq 0$ デアリマス。又 $y \geqq x, 0$ トスレバ

$$((1 - P_0) y, Pv) = (y, (1 - P_0) Pv) \geqq 0$$

$$(P_0 y - P_0 x, Pv) = (y - x, P_0 P v) \geqq 0$$

ナルニヨリ $(y - P_0 x, Pv) \geqq 0$ 即チ $y \geqq P_0 x$

故ニ

$$P_0 x = x \vee 0 = x_+$$

デアルコトが知ラレマス。故ニ $\mathfrak{H}$ ハ lattice デアリマス。

次ニ $x \geqq y \geqq 0$ ナレバ

$$\|x\| \geqq \|y\|$$

ナルコトヲ証明シマセウ。其レニハ先ヅ豫備トシテ，α ヲ正數．$x \geqq 0$ ナルトキハ

$$(*) \quad \|x + \alpha P v\| \geqq \|x\| \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

デアルコトヲ注意シマセウ。此レハ然シ

$$\|x + \alpha P v\|^2 = \|x\|^2 + 2\alpha (x, Pv) + \|Pv\|^2$$
$$\geqq \|x\|^2$$

カラ明カデアリマス。

$\{Pv\}$ $(P\in\mathfrak{p})$ ガ $\mathfrak{y}$ デ überall dicht デアリマスカラ任意ノ正数 ε ニ対シテ

$$\| y-(\alpha_1 P_1 v+\cdots\cdots+\alpha_n P_n v)\|<\varepsilon$$

ナル $P_1,\cdots\cdots, P_n\in\mathfrak{p}$ ガ存在シマス。コノ場合 $P_\mu P_\nu=0$ $(\mu\neq\nu)$ ノナル様ニ出来ルコトハ明カデスカラ、$P_\mu P_\nu=0$ $(\mu\neq\nu)$ デアルトシマス。

然ルトキハ

$$\| y-(\alpha_1 P_1 v+\cdots\cdots+\alpha_n P_n v)\|^2=\|(1-P_1-\cdots\cdots-P_n)y\|^2$$
$$+\|P_1 y-\alpha_1 P_1 v\|^2+\cdots\cdots+\|P_n y-\alpha_n P_n v\|^2$$

デアリマス。又 $y\geqq 0$ ナレバ $P_0\in\mathfrak{p}$ ニ對シテ、又 $P_0 y\geqq 0$ ナルコトハ明ラカデスカラ、以上ノ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ ノ中，例ヘバ α_1 ガ負数ナレバ $(*)$ ニヨリ

$$\|P_1 y-\alpha_1 P_1 v\|\geqq\|P_1 y\|$$

トナリマスカラ

$$\| y-(\alpha_1 P_1 v+\cdots\cdots+\alpha_n P_n v)\|^2$$

$$\geqq\| y-\sum_{\alpha_\nu>0}\alpha_\nu P_\nu v\|^2$$

トナリマス。故ニ

$$\| y-(\alpha_1 P_1 v+\cdots\cdots+\alpha_n P_n v)\|<\varepsilon$$

ニテ $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n\geqq 0$ ト假定シテモヨイコトニナリマス。

其ノトキハ $x\geqq y\geqq 0$ ニ對シテハ

$$(x,\ \alpha_1 P_1 v+\cdots\cdots+\alpha_n P_n v)$$

$$\geqq (y, \alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)$$

デアリマス。又一方

$$(y, \alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)$$

$$\geqq (y, y) - \|y\| \cdot \|y - (\alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v)\|$$

$$\geqq \|y\|^2 - \|y\| \varepsilon$$

$$(x, \alpha_1 P_1 v + \cdots\cdots + \alpha_n P_n v) \leqq (x, y) + \|x\| \cdot \varepsilon$$

$$\leqq \|x\| \|y\| + \|x\| \varepsilon$$

故ニ

$$\|x\| \cdot \|y\| + \|x\| \varepsilon \geqq \|y\|^2 - \|y\| \varepsilon$$

又 ε ハ任意デスカラ

$$\|x\| \cdot \|y\| \geqq \|y\|^2$$

從ッテ $\|x\| \geqq \|y\|$ デアリマス。

次ニ $\mathfrak{H}$ ハ σ-complete デアリマス。如何トナレバ

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots\cdots \ x_n \geqq 0$ トスレバ

$$\|x_n\| \leqq \|x_1\| \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

デ $(x_1, Pv) \geqq (x_2, Pv) \geqq \cdots\cdots \geqq 0$, $(P \in \mathfrak{R})$ デ然モ $\{Pv\}$ ガ $\mathfrak{H}$ デ überall dicht デスカラ, $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ハ weakly convergent デアリマス。故ニ

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, Pv) = (x_0, Pv) \qquad (P \in \mathfrak{R})$$

ナル x_0 ガ存在スル。又此ノ式カラ $x_0 = \bigcap_n x_n$ デアルコトガ解リマス. 即チ $\mathfrak{H}$ ハ σ-complete vector-lattice

デアリマス。

今 $a \frown b = 0$ トシマス。$x = a - b$ ト置ケバ

$$x_+ = x \vee 0 = a$$

デアリマスカラ、最初ニ証明シタ処ニヨリ

$$x_+ = P_0 x \qquad (P_0 \in \mathfrak{P})$$

ナル P_0 ガ存在シマス。然ルトキハ

$$b = x_+ - x = -(1 - P_0)x$$

デアリマスカラ

$$(a, b) = -(P_0 x, (1 - P_0)x) = 0$$

トナリマス。従ッテ

$$\| a + b \|^2 = \| a \|^2 + \| b \|^2$$

又

$$\| (|x|) \|^2 = \| a + b \|^2 = \| a \|^2 + \| b \|^2 = \| a - b \|^2 = \| x \|^2$$

トナリマス。故ニ以上カラ $\mathfrak{Y}$ ガ L_2-Modul デアルコトガ知ラレマス。今コノ L_2-Modul ヲ $\mathfrak{L}_2$ ト置キマス。

次ニ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor ガ $\mathfrak{P}$ デアルコトヲ証明シマセウ。最初ニ述ベタヤウニ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor ハ $\mathfrak{Y}$ ノ Projektionsoperator デ然カモ einfach ナ Ring ヲナスコトガ解ッテ居リマスカラ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor ガ $\mathfrak{P}$ ニ属スル Projektionsoperator デアルコトヲ証明スレバ充分デアリマス。今 $[p]$ ヲ $\mathfrak{L}_2$ ノ Projektor トシマセウ。然ルトキハ $1 - [p]$ モ亦 Projektor デアリマス。又 Projektor ハ positive linear operator デ

アリマスカラ, $x \geqq 0$ ナラバ又 $(1-[p])x \geqq 0$ デアリマス。尚一方 $P_0 \in \mathfrak{P}$ ナル任意ノ P_0 ニ對シテハ

$$(P_0 v, P v) = \| P_0 P v \|^2 \geqq 0 \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

デアリマスカラ $P_0 v \geqq 0$ デアリマス。故ニ

$$\left((1-[p])(1-P_0) P v, P_0 Q v \right) \geqq 0$$

$$(P_0, P, Q \in \mathfrak{P})$$

デアリマス。此不等式ヨリ

$$0 = \left((1-P_0) P v, P_0 Q v \right) \geqq \left([p](1-P_0) P v, P_0 Q v \right) \geqq 0$$

ヲ得マスカラ

$$\left([p](1-P_0) P v, P_0 Q v \right) = 0$$

デナケレバナリマセン。從ッテ又

$$\left(P_0 [p](1-P_0) P v, Q v \right) = 0$$

デアリマス。然ルニ $\{Q v\}$ $(Q \in \mathfrak{P})$ ハ $\mathfrak{H}$ ニテ *überall dicht* デスカラ

$$P_0 [p] (1-P_0) P v = 0$$

又 $\{P v\}$ $(P \in \mathfrak{P})$ ガ *überall dicht in* $\mathfrak{H}$ デスカラ

$$P_0 [p] (1-P_0) = 0$$

即チ $P_0 [p] = P_0 [p] P_0$

故ニ此ノ *adjungiert* ヲ考ヘレバ又

$$[p] P_0 = P_0 [p] P_0$$

故ニ $P_0 [p] = [p] P_0$ トナリ $[p]$ ハ $\mathfrak{P}$ ノ總ベテノ *Projek-*

tionsoperator ト commutative デ, $\mathfrak{P}$ ハ einfach デスカラ $[p] \in \mathfrak{P}$ デナケレバナリマセン. 以上ニテ証明サレマシタ。

此ノ定理ニ於ケル順序付ケハ一通リデハナイが次ノ定理が成立ス。

[定理] abstract Hilbert space $\mathfrak{H}$ ノ二通リノ順序付 $\mathcal{L}_2'$, $\mathcal{L}_2''$ が同一ノ Projektor Ring $\mathfrak{P}$ ヲ有スルナラバ, $\mathfrak{P} \ni P, Q$ ナル P, Q ヲ次ノ如クニ定メルコトが出来ル. 即チ

$$PQ = 0, \quad P + Q = 1$$

$$Px \geqq 0 \quad \text{in } \mathcal{L}_2' \rightleftarrows Px \geqq 0 \quad \text{in } \mathcal{L}_2''$$

$$Qx \geqq 0 \quad \text{in } \mathcal{L}_2' \rightleftarrows Qx \leqq 0 \quad \text{in } \mathcal{L}_2''$$

[証明] $\mathfrak{P} \ni P \neq 0 \rightarrow Pv \neq 0$ ナル v ニ對シテ $v_0 = |v|$ in $\mathcal{L}_2'$ トスレバ, 又 $\mathfrak{P} \ni P \neq 0 \rightarrow Pv_0 \neq 0$ デアリマス。又

$$v_+'' = v_0 \smile 0 \quad \text{in } \mathcal{L}_2''$$

$$v_-'' = (-v_0) \smile 0 \quad \text{in } \mathcal{L}_2''$$

トシ, $P = [v_+'']$, $Q = [v_-'']$ ト置ケバ, 此レが用件ニ適スルコトハ容易ニ知ラル。

(注意) abstract Hilbert space ノ順序付ケハ, 丁度座標軸ヲ與ヘルコトニナルノデアリマス。

故ニ selfadjoint operator H ニ對シテハ,

適當ニ順序付ケヲ行ヘバ，Hハ *Diagonal form*. 即チ *Dilatator* トナルノデアリマス。此ノコトニツイテハ何レ又詳シク書クコトニシマス。

—— 1943，1，2 ——