1095. 可換デナイ Operator Ring ノスペクトル分解ニ就イテ, II

小平　邦彦（東京文理大）

§2. $\mathfrak{h}$, M 及ビ C(M) ノ間ノ関係

2.1.　コノ§デハ M ノ commutator C(M) ヲ CM 或ハ M^C ト書クコトニスル.—— $\mathfrak{h}$ ノ bounded operator A_j ($j = 1, 2, \cdots\cdots$) ガ任意ニ與ヘラレテキルトシ, コノトキ

$$\begin{cases} Q(f, g) = (f, g) + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j f, A_j g), \\ \mathfrak{a} = (f;\ Q(f, f) < +\infty) \end{cases}$$

トオケバ, $\mathfrak{a}$ ハ $Q(f, g)$ ヲ内積トスル Hilbert 空間ヲ作ル。

$\| g \| \leqq \sqrt{Q(g, g)}$ デアルカラ, $f \in \mathfrak{h}$ ヲ固定シテ (f, g) ヲ $g \in \mathfrak{a}$ ノ linear functional ト考ヘレバ Riesz ノ定理カラ明カナル如ク,

$$(f, g) = Q(Bf, g),\quad f \in \mathfrak{h},\quad g \in \mathfrak{a}$$

ナル operator B ガ定マル. B ハ $(f, Bf) = Q(Bf, Bf)$ カラ明ラカナル如ク bounded hermitian positive semi-definit デアッテ $\mathfrak{h} - \mathfrak{a} = (f;\ Bf = 0)$ デアルカラ

$$[\text{Range } B] = [\mathfrak{a}]$$

ガ成立ツ。コノトキ

Lemma 1.1. $\mathfrak{M} = \mathrm{Range}\sqrt{B}$ デアッテ, f, $g \in [\mathfrak{M}]$ ニ對シテハ

$$Q(\sqrt{B}f, \sqrt{B}g) = (f, g)$$

ガ成立スル。[1)]

證明. $f \in [\mathfrak{M}]$ ヲ任意ニトル. スルト $[\mathfrak{M}] = [\mathrm{Range}\sqrt{B}]$ デアルカラ $f = \lim\limits_{j} \sqrt{B} f_j$ ナル f_j ガ存在スル. 從ッテ

$$Q(Bf_j - Bf_k, Bf_j - Bf_k) = \| \sqrt{B} f_j - \sqrt{B} f_k \|^2$$

ダカラ Bf_j ハ Q ニツイテ収斂スル. ソコデコノ limit ヲ f° トスル: $f^\circ = \lim^{(Q)} B f_j = f^\circ \in \mathfrak{M}$ 然ルトキハ明ラカニ $\lim Bf_j = f^\circ$ デアルカラ $\sqrt{B} f = \lim B f_j = f^\circ \in \mathfrak{M}$. スナハチ Range $\sqrt{B} \subseteq \mathfrak{M}$ デアル。

從ッテ又, 他ニ $g \in [\mathfrak{M}]$ ヲ任意ニトッテ $g = \lim\limits_{j} \sqrt{B} g_j$ トスレバ

$$Q(\sqrt{B} f, \sqrt{B} g) = \lim_{j} Q(B f_j, B g_j)$$

---

1) コノ Lemma 1.1 ト次ノ Lemma 1.2 ハ F. J. Murray ト J. v. Neumann: On Rings of Operators. Annals 37 (1936), Chap. 9, Lemma 9.1.1—9.1.5 ニ他ナラナイガ念ノタメ證明ノ要点ヲ繰返スコトニシタ。

$$= \lim_j (\sqrt{B} f_j, \sqrt{B} g_j) = (f, g).$$

コレヨリ久，Range $\sqrt{B}$ ハ $\mathfrak{N}$ 内デ Q-closed ナルコトガ分ル．然ルニ今 $g \in \mathfrak{N}$ ヲ $Q(\sqrt{B} f \;\; g) = 0$, $f \in \mathfrak{H}$，ナル元トスレバ，任意ノ $h \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $(h, g) = Q(Bh, g) = 0$； 從ッテ $g = 0$ デアル．故ニ $\mathfrak{N} = \mathrm{Range}\sqrt{B}$ デナケレバナラナイ。

Lemma 1.2. 上ノ lemma ニ於テ $A_j \in \mathbb{M}$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナラバ $\sqrt{B} \in \mathbb{M}$ デアル．

證明． $A_j \in \mathbb{M}$ ナルトキハ任意ノ $A' \in \mathbb{M}^C$ ニ對シテ $A'\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}$ デアッテ，$f, g \in \mathfrak{N}$ ナルトキ $Q(A'f, g) = Q(f, A'^* g)$ デアル．從ッテ $h \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $Q(A'Bh, g) = Q(Bh, A'^* g) = (h, A'^* g) = (A'h, g)$ ガ成立スル．故ニ $A'B = BA'$, スナハチ $B \in \mathbb{M}$.

從ッテ $\sqrt{B} \in \mathbb{M}$ デアル。

以上ノ結果ヲ用ヒテ次ノ基本的ナ lemma ガ證明サレル。

Lemma 1.3. $g_0 \in [\mathbb{M} f_0]$ 2) ナラバ $[\mathbb{M}^C g_0] \subseteq [\mathbb{M}^C f_0]$ $(\mathbb{M})$

---

2) $[\mathbb{M} f_0]$ ハ $(Af_0;\ A \in \mathbb{M})$ ノ張ル linear closed manifold ヲ表ハス．$[\mathbb{M} f_0]$ ガ $\mathbb{M}^C$ ナルコトハ明ラカデアラウ。

証明.[3] $g_0 \in [\mathbb{M} f_0]$ デアルカラ g_0 ハ $X f_0$, $X \in \mathbb{M}$ ノ limit トシテ表ハサレル. ソコデ $X_j \in \mathbb{M}$ ヲ $\| g_0 - X_j f_0 \| < \frac{1}{2^j}$ ナル様ニトッテ $A_j = \sqrt{2}^{\,j}(X_j - X_{j-1})$ トオキ, A_j カラ上記ノ $\mathfrak{a}$ 及ビ $\sqrt{B}$ ノ作ル. 然ルトキハ容易ニ確カメラレル如ク $f_0 \in \mathfrak{a}$ デアッテ, Lemma 1.2 カラ $\sqrt{B} \in \mathbb{M}$ デアル. 従ッテ又 $\mathfrak{a} = \mathrm{Range}\,\sqrt{B}$ デアルカラ, $[\mathfrak{a}] = [\mathrm{Range}\,\sqrt{B}]\ \eta\ \mathbb{M}$ デアル. f_0 ハ $h_0 \in [\mathfrak{a}]$ ヲ用ヒテ $f_0 = \sqrt{B}\, h_0$ ト表ハサレル.

コノコトカラ

$$[\mathbb{M}^c f_0] = [\mathbb{M}^c \sqrt{B}\, h_0] = [\sqrt{B}\, \mathbb{M}^c h_0]$$

$$= [\mathrm{Range}\,\sqrt{B}\, P[\mathbb{M}^c h_0]]$$

$$\sim \mathfrak{y}^{-}(f;\ \sqrt{B}\, P[\mathbb{M}^c h_0] f = 0)$$

$$= \mathfrak{y}^{-}(f;\ P_{[\mathfrak{a}]} P_{[\mathbb{M}^c h_0]} f = 0)$$

$$\sim [\mathrm{Range}\, P_{[\mathfrak{a}]} P_{[\mathbb{M}^c h_0]}]$$

$$= [P_{[\mathfrak{a}]} \mathbb{M}^c h_0] = [\mathbb{M}^c P_{[\mathfrak{a}]} h_0] = [\mathbb{M}^c h_0]$$

ガ出ル. 然ルニ lemma 1.1 ニヨレバ $f \in \mathfrak{y}$ ニ対シテ

$$\| (X_j - X_{j-1}) \sqrt{B} f \| \leqq \frac{1}{2^j} Q(\sqrt{B} f, \sqrt{B} f)$$

---

3) Lemma 1.3 ハ Murray & Neumann: Rings of Operators, Lemma 9.3.1 ニ相当スル. 証明ハ Murray & Neumann ノ証明カラ unbounded operator ヲ消去シタ形ニナッテヰル.

$$= \frac{1}{2^j} \| P_{[\Omega]} f \|^2 \leqq \frac{1}{2^j} \| f \|^2$$

デアルカラ，$X_j\sqrt{B}$ ハ uniform topology デ収斂スル。

$$\lim_{j\to\infty} X_j \sqrt{B} = A$$

トオケバ $A \in \mathbb{M}$ デアッテ，$A h_0 = \lim A_j f_0 = g_0$ デアル．従ッテ

$$[\mathbb{M}^c g_0] = [\mathbb{M}^c A h_0] = [\text{Range } A P_{[\mathbb{M}^c h_0]}]$$

$$\sim \text{by} - (f;\ AP_{[\mathbb{M}^c h_0]} f = 0)$$

$$\leq \text{by} - (f;\ P_{[\mathbb{M}^c h_0]} f = 0)$$

$$= [\mathbb{M}^c h_0]$$

故ニ $[\mathbb{M}^c g_0] \precsim [\mathbb{M}^c f_0]$ デアル。

Lemma 1.4. $[\mathbb{M}^c g_0] \precsim [\mathbb{M}^c f_0]$ $(\mathbb{M})$ ナラバ

$$[\mathbb{M} g_0] \precsim [\mathbb{M} f_0] \ (\mathbb{M}^c)$$

デアル。[4)]

証明．仮定ニヨッテ $[\mathbb{M}^c g_0] = W[\mathbb{M}^c f_0]$ トナル $\mathbb{M}$ ノ partially isometric operator W ガ存在スル．故ニ $g_0 \in [\mathbb{M}^c W f_0]$.

故ニ Lemma 1.3 ニヨッテ $[\mathbb{M} g_0] \precsim [\mathbb{M} W f_0]$

---

4) Murray & Neumann: Rings of Operators, Lemma 9.3.2

$\leqq [\mathbb{M} f_0]$ デアル。

Lemma 1.5. $\mathfrak{M} \sim [\mathbb{M}^c f_0]$ $(\mathbb{M})$, $\mathfrak{N} \sim [\mathbb{M} f_0]$ $(\mathbb{M}^c)$ ナルトキハ, $\mathfrak{M} = [\mathbb{M}^c g_0]$ $\mathfrak{N} = [\mathbb{M} g_0]$ ナル g_0 ガ存在スル。[5]

証明. 假定ニヨッテ $\mathfrak{e}_W = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{f}_W = [\mathbb{M}^c f_0]$ ナル $\mathbb{M}$ ノ partially isometric operator W 及ビ $\mathfrak{e}_V = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{f}_V = [\mathbb{M} f_0]$ ナル $\mathbb{M}^c$ ノ partially isometric operator V ガ存在スル. コノ W ト V ヲ用ヒテ $g_0 = WVf_0$ トオク. 然ルトキハ

$$\mathfrak{M} = W[\mathbb{M}^c f_0] = [\mathbb{M}^c W f_0]$$
$$\supseteqq [\mathbb{M}^c V W f_0] = [\mathbb{M}^c g_0]$$

然ルニ, $f_0 = V^* V f_0$ デアルカラ

$$\mathfrak{M} = W[\mathbb{M}^c f_0] = [\mathbb{M}^c W V^* V f_0]$$
$$\leqq [\mathbb{M}^c W V f_0] = [\mathbb{M}^c g_0]$$

故ニ $\mathfrak{M} = [\mathbb{M}^c g_0]$ デアル. 同様ニシテ $\mathfrak{N} = [\mathbb{M} g_0]$ ガ証明サレル。

Lemma 1.6. $\mathfrak{M}_j \sim [\mathbb{M}^c f_j]$ $(\mathbb{M})$, $\mathfrak{M}_j \perp \mathfrak{M}_k$ $(j \neq k)$; $\mathfrak{N}_j \sim [\mathbb{M} f_j]$ $(\mathbb{M}^c)$, $\mathfrak{N}_j \perp \mathfrak{N}_k$ $(j \neq k)$ ナルトキハ

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_j = [\mathbb{M}^c g_0], \\ \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{N}_j = [\mathbb{M} g_0] \end{cases}$$

---

5) Rings of Operators, lemma 10.1.3.

ナル g_0 ガ存在スル。[6]

証明. $\mathfrak{M}_j = [\mathbb{M}^c g_j]$, $\mathfrak{N}_j = [\mathbb{M} g_j]$ ナル g_j ヲ $\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\| < +\infty$ ナルヤウニ選ンデ $g_0 = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$ トオク 然ルトキハ明ラカニ $[\mathbb{M}^c g_0] \subseteq \sum \oplus \mathfrak{M}_j$ デアル. 一方ニ於テ $g_j = P_{[\mathbb{M} g_j]} g_0$ デアルカラ

$$\mathfrak{M}_j = [\mathbb{M}^c g_j] = [\mathbb{M}^c P_{[\mathbb{M} g_j]} g_0] \subseteq [\mathbb{M}^c g_0]$$

故ニ $\sum \oplus \mathfrak{M}_j = [\mathbb{M}^c g_0]$ デアル. $\sum \oplus \mathfrak{N}_j = [\mathbb{M} g_0]$ モ同様ニ証明サレル。

Lemma 1.7. $[\mathbb{M}^c f]_Z = [\mathbb{M} f]_Z = [f]_Z$ デアル。[7]

証明. $E \in \mathbb{Z}$ ニ對シテ $E[\mathbb{M}^c f] = [\mathbb{M}^c E f]$, $E[\mathbb{M} f] = [\mathbb{M} E f]$ ナルコトカラ明ラカデアル。

Lemma 1.8. $E \in \mathbb{Z}$ トスル. コノトキ $[\mathbb{M}^c f]$ ガ E ニ於テ $\mathbb{M}$ ニ関シ最小ナラバ $[\mathbb{M} f]$ ハ E ニ於テ $\mathbb{M}^c$ ニ関シ最小デアル[8]

証明. $[\mathbb{M} f]_Z = E$ ハ既ニ証明サレテヰル. 従テ $\mathfrak{M} \subseteq [\mathbb{M} f]$; $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathbb{M}^c$, $\mathfrak{M}_Z = E$ ナル closed linear

6) Rings of Operators, lemma 10.1.4.

7) コレデ初メテ既約ナ ring ニ見ラレナイ現象ガ表ハレル。

8) 次頁へ

manifold トスル．時シカニ $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{M}=P_{\mathfrak{M}}[\mathbb{M}f]=[\mathbb{M}P_{\mathfrak{M}}f]$ ト表ハサレル。故ニ $\mathfrak{M}\subseteq[\mathbb{M}f]$ ナルコトカラ *lemma* 1.4 ニヨッテ $[\mathbb{M}^{c}P_{\mathfrak{M}}f]\lesssim[\mathbb{M}^{c}f]\,(\mathbb{M})$，又 *lemma* 1.7 カラ $[\mathbb{M}^{c}P_{\mathfrak{M}}f]_{Z}=\mathfrak{M}_{Z}=E$ デアル，故ニ $[\mathbb{M}^{c}f]$ ハ最小デアルカラ $[\mathbb{M}^{c}P_{\mathfrak{M}}f]\sim[\mathbb{M}^{c}f]\,(\mathbb{M})$，従ッテ再ビ *lemma* 1.4 ニヨッテ

$$\mathfrak{M}=[\mathbb{M}P_{\mathfrak{M}}f]\sim[\mathbb{M}f]\,(\mathbb{M}^{c})$$

デナケレバナラス．故ニ今 $\mathbb{M}^{c}$ ニ関シテ定理 I ヲ適用シテ E^{c}_{I}，E^{c}_{II}，E^{c}_{III} ヲ各 $E^{c}_{N}\mathfrak{H}$ ニ於テ $E^{c}_{N}\mathbb{M}^{c}$ ガ夫々 N 型ニ属スルヤウニ定メレバ，$\mathfrak{M}\subseteq[\mathbb{M}f]$，$\mathfrak{M}_{Z}=E$ ナル $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathbb{M}^{c}$ ガスベテ $\sim[\mathbb{M}f]$ ナルコトカラ，$E^{c}_{\mathrm{I}}[\mathbb{M}f]$ ハ $E\cdot E^{c}_{\mathrm{I}}$ デ最小デ，$EE^{c}_{\mathrm{II}}=0$ デナケレバナラナイコトガ分ル．故ニ $EE^{c}_{\mathrm{III}}=0$ ヲ示セバ *lemma* ハ証明セラレル。

$EE^{c}_{\mathrm{III}}=0$ ヲ示スタメニ $\mathfrak{H}=EE^{c}_{\mathrm{III}}\mathfrak{H}$ ト考ヘル．然ルトキハ $\mathbb{M}^{c}$ ハ III 型ニ属スルカラ $[\mathbb{M}g]_{Z}=[\mathbb{M}h]_{Z}$

2) コレハ Rings of Operators, lemma 5.1.4 ヲ一般ノ場合ニ拡張シタモノデアルガ，証明ノ原理ハ少シク異ナル．Rings of Operators ノ証明ハ $\mathfrak{H}$ ガ複素 Hilbert 空間ナルコトヲ利用シテヰルガ吾々ノ証明ハ real ノ Hilbert 空間デモ成立スル。

ナラバ $[\mathbb{M}g] \sim [\mathbb{M}h]\ (\mathbb{M}^c)$ デアル。故ニ Lemma 1.4 ニヨリ $[\mathbb{M}^c g]_Z = [\mathbb{M}^c h]_Z$ ナラバ $[\mathbb{M}^c g] \smile [\mathbb{M}^c h]\ (\mathbb{M})$ ガ成立ツ. 従ツテ $[\mathbb{M}^c f] = h_f$ デナケレバナラナイコトニナル. 何トナレバ $h_f - [\mathbb{M}^c f]$ ガ 0 ナラザル g ヲ含ンデキタトシ, $h = f + g$ トオケバ, $[\mathbb{M}^c h]_Z = 1$ トナルカラ

$$[\mathbb{M}^c g] \oplus [\mathbb{M}^c f] = [\mathbb{M}^c h] \smile [\mathbb{M}^c f]\ (\mathbb{M})$$

コレハ $[\mathbb{M}^c f]$ ガ最小ナルコトニ反スル ——. 従ツテ h_f ハ $\mathbb{M}$ ニ関シテ最小デアル. 故ニ任意ノ $\mathbb{M}$ ニ属スル $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_z h_f$ ト表ハサレル. スナハチ $\mathbb{M}$ ニ属スル projection ハスベテ $\mathbb{Z}$ ニ含マレルノデアル. Hermitic operator H ヲ

$$H = \int \lambda \, dE(\lambda)$$

ト現ハシタトキ, $H \in \mathbb{M}$ ナラバ $E(\lambda) \in \mathbb{M}$ デアル. 故ニ $\mathbb{M}$ ニ属スル hermitic operator モ亦スベテ $\mathbb{Z}$ ニ含マレル。

$\mathfrak{N} \subseteq [\mathbb{M}f]$, $\mathfrak{N}_z = 1$ ナル $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathbb{M}^c$ デ $[\mathbb{M}f]$ ナルモノヲトリ, $g \in [\mathbb{M}f] - \mathfrak{N}$, $g \neq 0$ トスル. $g \in [\mathbb{M}f]$ デアルカラ

$$\| A_\nu f - g \| < \frac{1}{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \text{-----})$$

ナル $A_\nu \in \mathbb{M}$ ガ存在スル. コノ様ナ A_ν ヲ定メテオイテ

$$H_{\nu\mu} = (A_\nu - A_\mu)^*(A_\nu - A_\mu)$$

トオケバ，$H_{\nu\mu} \in \mathfrak{Z}$ デアルカラ

$$H_{\nu\mu} = \int_\Omega h_{\nu,\mu}(\lambda)\, E(d\lambda)$$

ト表ハサレル．明ラカニ $h_{\nu\mu}(\lambda) \geqq 0$ デアッテ

$$\int_\Omega h_{\nu\mu}(\lambda) \| E(d\lambda) f \|^2 = (H_{\nu\mu} f, f)$$
$$= \| A_\nu f - A_\mu f \|^2$$

従ッテ $\nu \leqq \mu$ ノトキ

$$\int_\Omega h_{\nu\mu}(\lambda) \| E(d\lambda) f \|^2 < \frac{1}{2^{2\nu-2}}$$

ガ成立スル．Ω ノ可測部分集合 Γ ニ對シテ $m_f(\Gamma)$ ヲ

$$m_f(\Gamma) = \int_\Gamma \| E(d\lambda) f \|^2$$

ト定義スル．然ルトキハ

$$\Gamma_{\nu\mu} = \left(\lambda ;\ h_{\nu\mu}(\lambda) \geqq \frac{1}{2^\nu} \right)$$

トオケバ，上ノ不等式ニヨッテ，$\nu \leqq \mu$ ノトキ
$m_f(\Gamma_{\nu\mu}) < \frac{1}{2^{\nu-2}}$ ガ成立スル．故ニ

$$\Gamma_k = \sum_{\nu \geqq k} \sum_{\mu \geqq k}{}^{\cup}\ \Gamma_{\nu\mu}$$

トオケバ $m_f(\Gamma_k) < \frac{1}{2^{k-4}}$ トナル．入 ∈ Γ_k ニ對シテハ $\Gamma_{\nu\mu}$ ノ定義カラ明カナル如ク，$k \leqq \nu \leqq \mu$ ノトキ $h_{\nu\mu}(\lambda) < \frac{1}{2^\nu}$ ガ成立スル。故ニ $E_k = E(\Omega - \Gamma_k)$ トオケバ

$$|||E_k A_\nu - E_k A_\mu||| < \frac{1}{2^\nu} \qquad (k \leqq \nu \leqq \mu)$$

スナハチ $E_k A_\nu$ ハ uniformly ニ收斂スルノデアル．$\lim E_k A_\nu = A_k$ トオケバ $\lim A_\nu f = g$ ナルコトカラ，明ラカニ

$$E_k g = A_k f$$

一方ニ於テ，$m_f(\Gamma_k) < \frac{1}{2^{k-4}}$ カラ知ラレル如ク $E(\Gamma_k) f \to 0$ デアル．故ニ $[f]_Z = 1$ ト假定シテキルノデアルカラ，$E(\Gamma_k) \to 0$，從ツテ $\lim E_k = 1$ デナケレバナラヌ．故ニ k ヲ充分大キクトッテ $E_k g = g_0$ トオクナラバ

$$g_0 = Af \in [\mathbb{M} f] - \mathfrak{M}, \quad A \in \mathbb{M}$$

ナル 0 ナラザル g_0 ガ存在スルコトガ分ル．$g_0 \in [\mathbb{M} f] - \mathfrak{M}$ ナルコトハ $P_{\mathfrak{M}} g_0 = E_k P_{\mathfrak{M}} g = 0$ カラ明ラカデアル。

A ノ canonical decomposition ヲ $A = WH$ トシ $F = W^* W$ トオク．

然ルトキハ $g_0 = WHf$ カラ $Ff \in [\mathbb{M} g_0]$ ナル事ガ知ラレル。

故ニ $\mathfrak{M} \subseteq [\mathbb{M} f]$ デアルカラ，$F \in \mathbb{Z}$ ナルコトニヨッテ

$$F\mathfrak{M} \subseteq F[\mathbb{M} f] = [\mathbb{M} F f] \subseteq [\mathbb{M} g_0]$$

従ッテ $P_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{M}^C$ デアルカラ

$$F\mathfrak{M} \subseteq P_{\mathfrak{M}}[\mathbb{M} g_0] = [\mathbb{M} P_{\mathfrak{M}} g_0] = 0$$

コレハ $\mathfrak{M}_Z = 1$ ニ反スル。

Lemma 1.9. 任意ノ *closed linear manifold* $\mathfrak{M}$ が與ヘラレタトキ $f \in \mathfrak{M}$，$[f]_Z = \mathfrak{M}_Z$ ナル f が存在スル。

証明. $f \in \mathfrak{M}$ ヲ任意ニトッテ $[f]_Z$ ヲ作ッタトキ，$[f]_Z \neq \mathfrak{M}_Z$ ナラバ，$\mathfrak{M} - [f]_Z \mathfrak{M}$ カラ更ニ $g \neq 0$ ヲトッテ $f_1 = f + g$ ヲ作リ

$$[f_1]_Z > [f]_Z$$

ナラシメルコトが出来ル．コノ事カラ $[f]_Z = \mathfrak{M}_Z$ ナル f ノ存在が超限帰納法ニヨッテ容易ニ確メラレル。[9)]

定理 7. $\mathbb{M}$ ニ関シテ $\mathfrak{H}$ ヲ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathrm{I}} \oplus \mathfrak{H}_{\mathrm{II}} \oplus \mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ ノ形ニ分解シ，各 $\mathfrak{H}_N$ ニ於テ $\mathbb{M}$ が夫々 N 型ニ属スルヤウニスレバ，$C(\mathbb{M})$ モ亦 $\mathfrak{H}_N$ ニ於テ N 型ニ属スル.

---

9) 角谷氏ノ所謂 *methode of exhaustion* デアル．吾々ハ屡々コノ方法ヲ用ヒルが，適當ニ工夫スレバ常ニ超限帰納法ノ使用ヲ避ケルコトが可能デアル。

証明. $C(\mathbb{M})$ ニ関スル分解ヲ $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^C_{\mathrm{I}} \oplus \mathfrak{H}^C_{\mathrm{II}} \oplus \mathfrak{H}^C_{\mathrm{III}}$ トシ, コレガ $\mathbb{M}$ ニ関スル分解ト一致スルコトヲ言ヘバヨイ。先ヅ $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ ヲ考ヘソノ projection ヲ E_{I} トスル. 然ルトキハ E_{I} ニ於テハ $\mathbb{M}$ ニ関シ最小ナ $\mathfrak{N}^0$ ガ存在スル。$\mathfrak{N}^0$ ハ lemma 1.9 ニヨレバ $[f^0]_Z = 1$ ナル f^0 ヲ含ム。コノ f^0 カラ $[\mathbb{M}^C f^0]$ ヲ作レバ $\mathfrak{N}^0$ ガ最小ナルコトニヨッテ $[\mathbb{M}^C f^0]$ ハ $\mathfrak{N}^0$ ト一致シナケレバナラヌ。スナハチ最小デアル. 故ニ lemma 1.8 ニヨッテ $[\mathbb{M} f^0]$ ハ E_{I} ニ於テ $\mathbb{M}^C$ ニ関シ最小デアル。

従ッテ, $\mathbb{M}^C$ ハ $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ デI型ニ属スルカラ, $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}} \subseteq \mathfrak{H}^C_{\mathrm{I}}$ デナケレバナラヌ. 故ニ, $\mathbb{M}$ ト $\mathbb{M}^C$ ヲ入レカヘテ考ヘレバ $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{H}^C_{\mathrm{I}}$ デアル.

次ニ $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}} \cap \mathfrak{H}^C_{\mathrm{III}} = 0$ ヲ示サウ. コレガ分レバスナハチ lemma ハ証明サレタコトニナル。コノタメニ $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}} \cap \mathfrak{H}^C_{\mathrm{III}}$ ノ projection ヲ F トオク.

$\mathbb{M}^C$ ハ F デIII型ニ属シテヰルカラ, $f, g \in F\mathfrak{H}$ ニ對シテハ $[f]_Z = [g]_Z$ ナラバ $[\mathbb{M} f] \sim [\mathbb{M} g]$ $(\mathbb{M}^C)$ デアル. 故ニ lemma 1.4 ニヨッテ

$[f]_Z = [g]_Z$ ナラバ $[\mathbb{M}^C f] \sim [\mathbb{M}^C g]$ $(\mathbb{M})$

デナケレバナラナイ. コレハ明カニ $\mathbb{M}$ ガ $F\mathfrak{H}$ デII型ナル事ニ反スル (証明終).

$\mathbb{M}$ ト $C\mathbb{M}$ ノ間ニハ更ニ次ノ如キ関係ガ成立ス

ル：

定理 8. $D_{\mathbb{M}}$, $D_{C\mathbb{M}}$ ヲ適當ニ normalize シテオケバ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f]) = D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M} f])$$

ガスベテノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ成立スル. コノ normalization ノ下デ, $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathbb{M}$, $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathbb{M}^c$ ナル $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{N}$ ガ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}) = D_{C\mathbb{M}}(\mathfrak{N})$ ヲ滿足スルナラバ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ハ共通ノ f ヲ用ヒテ

$$\mathfrak{M} = [\mathbb{M}^c f], \quad \mathfrak{N} = [\mathbb{M} f]$$

ト表ハサレル。

證明. $\mathfrak{H}$ ヲ $\mathbb{M}$ ニ關シ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathrm{I}} \oplus \mathfrak{H}_{\mathrm{II}} \oplus \mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ ノ形ニ分解シ各 $\mathfrak{H}_N$ ヲ別々ニ考ヘレバヨイカラ, 始メカラ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ 又ハ $\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ デアルトシテオク. $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^c$ ヲ

$$\begin{cases} \mathcal{R} = (D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f]);\ f \in \mathfrak{H}) \\ \mathcal{R}^c = (D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M} f]);\ f \in \mathfrak{H}) \end{cases}$$

ト定義スル. $\mathcal{R}$ ヲ $\mathcal{R}^c$ ニ寫ス寫像 Φ ヲ

$$H = D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f]) \text{ ノトキ } \Phi(H) = D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M} f])$$

ニヨッテ定義スレバ, 先ヅ Lemma 1.4 カラ Φ ハ一對一デ而モ "順序" ヲ保ツコトガ知ラレル. Lemma 1.6 カラハ $H_j \in \mathcal{R}$ ヲ任意ニトッタトキ

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j \in \text{Range } D_{\mathbb{M}}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(H_j) \in \text{Range } D_{C\mathbb{M}}$$

ナラバ $\sum_{j=1}^{\infty} H_j \in \mathfrak{R}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \phi(H_j) \in \mathfrak{R}^c$ デアッテ

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} H_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(H_j)$$

ナルコトガ示サレル. $E \in \mathbb{Z}$ ニ對シテ, $H \in \mathfrak{R}$ ナラバ $EH \in \mathfrak{R}$ デ

$$\phi(EH) = E\phi(H)$$

ナルコトハ明ラカデアラウ。又 $\mathfrak{M} \subseteq [\mathbb{M}^c f]$, $\mathfrak{M} \eta \mathbb{M}$ ナル $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{M} = P_{\mathfrak{M}}[\mathbb{M}^c f] = [\mathbb{M}^c P_{\mathfrak{M}} f]$ ト書カレルカラ, $H_0 \in \mathfrak{R}$ ナラバ $H \leqq H_0$, $H \in \mathcal{R}ange\, D_{\mathbb{M}}$ ナル H ハスベテ $\mathfrak{R}$ ニ含マレル。

$k_y = k_{y_{\mathrm{I}}}$ ノ場合. コノ場合ニハ前定理ノ証明ニ於テ述ベタ如ク, $[\mathbb{M}^c f^0]$, $[\mathbb{M} f^0]$ ガ夫々 1 ニ於テ最小ナルベクトル f^0 ガ存在スル。コノ f^0 ヲ規準トシテ $D_{\mathbb{M}}$, $D_{c\mathbb{M}}$ ヲ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f^0]) = D_{c\mathbb{M}}([\mathbb{M} f^0]) = 1$$

ナル如ク normalize シテオク. 然ルトキハ即チ

$$1 \in \mathfrak{R}, \quad \phi(1) = 1 \in \mathfrak{R}^c$$

デアルカラ上ニ述ベタ如ク, 任意ノ $E \in \mathbb{Z}$ ニツイテ

$$E \in \mathfrak{R}, \quad \phi(E) = E \in \mathfrak{R}^c$$

ガ成立スル. $H \in \mathcal{R}ange\, D_{\mathbb{M}} \wedge \mathcal{R}ange\, D_{c\mathbb{M}}$ ナル任意ノ H ハ $\sum n E_n$ ナル形ヲモツカラ,

$E(n)=\sum_{n}^{\infty} E_n$ トオケバ $H=\sum E(n)$ ト書カレル．故ニ $E(n)\in\mathfrak{R}$, $\phi(E(n))=E(n)\in\mathfrak{R}^c$ デアルカラ，上ニ述ベタコトニヨッテ

$$H\in\mathfrak{R},\quad \phi(H)=H\in\mathfrak{R}^c$$

トルコトが分ル．$H\in\mathfrak{R}$ ヲ任意ニトッタトキ，$E\in\mathbb{Z}$, $F=1-E$ ヲ

$$EH\leqq\phi(EH),\quad FH\geqq\phi(FH)$$

ナレヤウニ定メルコトが出来ル。E ノ部分ヲ考ヘルト，EH ハ明ラカニ Range $D_{\mathbb{M}}\cap$ Range $D_{C\mathbb{M}}$ ニ属スルカラ $\phi(EH)=EH$ デナケレバナラヌ．$\phi(FH)=FH$ ナルコトハ次ノ如クシテ示サレル．$\phi(FH)=H_1$ トオケバ H_1 ハ Range $D_{\mathbb{M}}$ ト Range $D_{C\mathbb{M}}$ ノ両方ニ含マレル．故ニ $\phi(H_1)=H_1=\phi(FH)$．故ニ ϕ が一對一デアルカラ $H_1=FH$, 從ッテ $\phi(FH)=FH$ デアル．マトメテ言ヘバ

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^c-\text{Range}\,D_{\mathbb{M}}\cap\text{Range}\,D_{C\mathbb{M}}$$

デアッテ，スベテノ $f\in\mathfrak{h}$ ニ対シテ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f])=D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M}f])$$

が成立スルノデアル。

$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{II}$ ノ場合．コノ場合ニハ $[f^0]_z=1$ ナル f^0 デ $[\mathbb{M}^c f^0]$, $[\mathbb{M} f^0]$ が共ニ有限ナル如キ f^0 が存

在スル。何トナレバ $\mathbb{M}$ ハ $\mathfrak{N}_Z=1$ ナル有限ノ $\mathfrak{N}$ ヲ含ム. コノ $\mathfrak{N}$ カラ lemma 1.9 ニヨッテ $[f]_Z$ ガ 1 ナル f ヲ選ンデ $[\mathbb{M}^c f]$ ヲ作レバ明ラカニ $[\mathbb{M}^c f] \subseteq \mathfrak{N}$ デアル. $[\mathbb{M} f]$ ハ $\mathfrak{N}_Z=1$ ナル有限ノ $\mathfrak{N}\,\eta\,\mathbb{M}^c$ ヲ含ム. コノ様ナ $\mathfrak{N}$ ヲ定メテ $f^0 = P_{\mathfrak{N}} f$ トオケバ, $[\mathbb{M} f^0] = \mathfrak{N}$ ハ有限, 又 $P_{\mathfrak{N}}$ ハ $\mathbb{M}^c$ ニ属スルカラ

$$[\mathbb{M}^c f^0] = [\mathbb{M}^c P_{\mathfrak{N}} f] \subseteq [\mathbb{M}^c f] \subseteq \mathfrak{N},$$

従ッテ $[\mathbb{M}^c f^0]$ モ有限デアル. $[f^0]_Z = 1$ ナルコトハ $[f^0]_Z = \mathfrak{N}_Z$ カラ明ラカデアル——. コノ f^0 ヲ一ツ定メテ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f^0]) = D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M} f^0]) = 1$$

ナルヤウニ $D_{\mathbb{M}}, D_{C\mathbb{M}}$ ヲ normalize シテオク. 然ルトキハ $h_Z = h_Z I$ ノ場合ト同様ニ, $\in \mathbb{Z}$ ナル E ハスベテ $\mathfrak{N}$ 及ビ $\mathfrak{N}^c$ ニ含マレテヰテ, $\Phi(E) = E$ ガ成立スル. 正整数 n ヲ任意ニトッテ $\frac{1}{n}E$ ヲ考ヘル. ソコデ若シモ $\Phi\left(\frac{1}{n}E\right) \leqq \frac{1}{n}E$ ナラバ

$$n\Phi\left(\frac{1}{n}E\right) = \Phi\left(n\cdot\frac{1}{n}E\right) = \Phi(E) = E$$

カラ $\Phi\left(\frac{1}{n}E\right) = \frac{1}{n}E$ デナケレバナラナイ. 若シモ逆ニ

$\Phi\left(\frac{1}{n}E\right) \geqq \frac{1}{n}E$ ナラバ $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}E\right) \leqq \frac{1}{n}E$, 従ッテ Φ ノ代リニ Φ^{-1} ヲ考ヘバ矢張リ $\Phi\left(\frac{1}{n}E\right) = \frac{1}{n}E$ デナケレバナ

ラナイ. コノ事カラ一般ニ

$$\phi\left(\frac{1}{n}E\right)=\frac{1}{n}E$$

ナルコトガ知ラレル. $H\in \mathrm{Range}\,D_{\mathbb{M}}\frown \mathrm{Range}\,D_{C\mathbb{M}}$ トル任意ノ H ハ

$$H=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}E_{\nu}+\sum_{\nu=1}^{\infty}F_{\nu}$$

ノ形ニ表ハサレル. 故ニ $F_{\nu}\in\mathfrak{R}$, $\phi(F_{\nu})=F_{\nu}\in\mathfrak{R}^{c}$,

$\frac{1}{2^{\nu}}E_{\nu}\in\mathfrak{R}$, $\phi\left(\frac{1}{2^{\nu}}E_{\nu}\right)=\frac{1}{2^{\nu}}E_{\nu}\in\mathfrak{R}^{c}$ ニヨッテ

$$H\in\mathfrak{R},\quad \phi(H)=H\in\mathfrak{R}^{c}$$

ナルコトガ分ル. ―― コレヨリ $\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}=\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}_{\mathrm{I}}}$ ノ場合ト同様ニ

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^{C}=\mathrm{Range}\,D_{\mathbb{M}}\frown \mathrm{Range}\,D_{C\mathbb{M}}$$

デアッテ, スベテノ f ニツイテ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^{c}f])=D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M}f])$$

ナルコトガ証明サレル. $\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}}=\mathfrak{h}_{\mathcal{Y}_{\mathrm{III}}}$ ノ場合ニモコレガ成立スルコトハ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^{c}f])=D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M}f])=\infty\cdot[f]_{z}$$

ニヨッテ明カデアル。

今コノ normalization ノ下デ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})=D_{C\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ デアッタトスレバ上ニ証明シタ結果カラ明カナル如リ $\phi(D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}))=D_{C\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ デアル. 故ニ ϕ ノ定義ニヨ

ッテ $\mathfrak{M} \sim [\mathbb{M}^c g]$, $\mathfrak{N} \sim [\mathbb{M} g]$ ナル g ガ存在スル.

従ツテ lemma 1. 5 ニヨツテ

$$\mathfrak{M} = [\mathbb{M}^c f], \quad \mathfrak{N} = [\mathbb{M} f]$$

ナル f ガ存在スル(証明終).

定理6ニヨレバ, $\mathfrak{h}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{II}}$ ハ更ニ分解セラレル. $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ノ両方ニ関シテ分解ヲ遂行スレバ結果ハ次ノ如クナル.

定理9. $\mathfrak{h}$ ハ $\mathbb{M}$ ト $C(\mathbb{M})$ ニ関シテ次ノ形ニ分解サレル.

$$\mathfrak{h} = \sum_{\substack{0 \leqq n \leqq \infty \\ 0 \leqq m \leqq \infty}} \sum \oplus\, \mathfrak{h}_{\mathrm{I}(n,m)} \oplus \sum_{\substack{n=1,\infty \\ m=1,\infty}} \sum \oplus\, \mathfrak{h}_{\mathrm{II}(n,m)}$$

$$\oplus\, \mathfrak{h}_{\mathrm{III}}.$$

$D_{\mathbb{M}}$, $D_{C\mathbb{M}}$ ノ range ハ, 適当ニ normalize シテオケバ, $\mathfrak{h}_{\mathrm{I}(n,m)}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{II}(n,m)}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{III}}$ ノ各々ニ於テ次ノ如クナル.

$$\mathrm{I}(n,m)\begin{cases} \text{Range } D_{\mathbb{M}} = (H;\ H \text{ ハ整}, \leqq n) \\ \text{Range } D_{C\mathbb{M}} = (H;\ H \text{ ハ整}, \leqq m) \end{cases}$$

$$\mathrm{II}(n,m)\begin{cases} \text{Range } D_{\mathbb{M}} = (H;\ H \leqq n) \\ \text{Range } D_{C\mathbb{M}} = (H;\ H \leqq m) \end{cases}$$

$$\mathrm{III}.\ \text{Range } D_{\mathbb{M}} = \text{Range } D_{C\mathbb{M}} = (H;\ H = \infty \cdot E)$$

但シコヽデ H ハ $\mathbb{Z}$ ニ属スル non-negative ナ formal self adjoint operator ヲ現ハス.

$D_{\mathbb{M}}$ ト $D_{C\mathbb{M}}$ ノ間ニハ

$$D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^{C} f]) = H_0 D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M} f]), \quad 0 < H_0 < \infty$$

ナル関係ガ成立スル。

2.2. E ガ斯クナル projection ノトキ、E$\mathfrak{H}$ ハ夫自身一ツノ Hilbert space ト考ヘラレル。コレヲ $\mathfrak{H}_{(E)}$ デ表ハス。$\mathfrak{H}$ ノ有界ナ operator A ガ與ヘラレタトキ EAE ハ $\mathfrak{H}_{(E)}$ ノ operator ト考ヘラレル。カク考ヘタトキ EAE ヲ $A_{(E)}$ ト表ハスコトヽシ、有界 operator ノ集合 $\mathbb{A}$ ニ對シテ

$$\mathbb{A}_{(E)} = (A_{(E)};\ A \in \mathbb{A})$$

トオク。然ルトキハ

定理10. $E \in \mathbb{M}$ ナルトキハ

$$C(\mathbb{M}_{(E)}) = (C(\mathbb{M}))_{(E)}$$

デアル。$E_Z = F$ トオケバ、$A \in C(\mathbb{M})_{(F)} = A_{(E)} \in C(\mathbb{M})_{(E)}$ ヲ對應セシメル對應：$A \longrightarrow A_{(E)}$ ニヨッテ $C(\mathbb{M})_{(F)}$ ト $C(\mathbb{M})_{(E)}$ ガ代數的ニ isomorphic ニナル。[10]

證明. 1) $(\mathbb{M}^{C})_{(E)} \subseteq (\mathbb{M}_{(E)})^{C}$ ナルコトハ明ラカデ

---

10) Rings of Operators, Lemma 11. 3. 2 及ビ 11. 3. 3 参照。證明ノ方法ハ全ク同ジデアルカラ、コヽデ要点ダケヲ繰返スコトニシタ。

アル．逆ニ $A \in (\mathbb{M}_{(E)})^{c}_{\prime}$ トスル．Aノ norm ヲ α トスレバ，

$$\|Af\| = \|AEf\| \leqq \alpha \|Ef\|$$

デアルカラ $\alpha^2 E - A^* A$ ハ positive semi-definit デアル．

$$H = (\alpha^2 E - A^* A)^{\frac{1}{2}}$$

トオケバ，H ハ $(\mathbb{M}_{(E)})^{c}$ ノ element デアッテ，$\alpha^2 E = A^* A + H^2$ デアル．故ニ $B_j \in \mathbb{M}$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ヲ任意ニトッタトキ

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j \Big\|^2 + \Big\| \sum_{j=1}^{n} B_j H f_j \Big\|^2$$

$$= \sum_j \sum_k (B_j A f_j,\ B_k A f_k) + \sum_j \sum_k (B_j H f_j,\ B_k H f_k)$$

$$= \sum_j \sum_k (A^* A E B_k^* B_j E f_j,\ f_k) + \sum_j \sum_k (H^2 E B_k^* B_j E f_j,\ f_k)$$

$$= \sum_j \sum_k ((A^* A + H^2) E B_k^* B_j E f_j,\ f_k)$$

$$= \alpha^2 \sum_j \sum_k (E B_k^* B_j E f_j,\ f_k) = \alpha^2 \Big\| \sum_j B_j E f_j \Big\|^2$$

ガ成立スル．故ニ

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j \Big\| \leqq \|A\| \Big\| \sum_{j=1}^{n} B_j E f_j \Big\|$$

従ッテ

$$\mathfrak{M} = \Big[\sum_{j=1}^{n} B_j E f_j\ ;\ n \geqq 1,\ B_j \in \mathbb{M},\ f_j \in \mathfrak{H} \Big]$$

トオケバ

$$\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j = \bar{A} \sum_{j=1}^{n} B_j E f_j$$

ニヨッテ, $\mathfrak{N}$ニ於ケル有界ナ *linear operator* $\bar{A}$ ガ定義サレル. 容易ニ知ラレル如ク, $\mathfrak{N}$ ハ $\mathbb{Z}$ デアッテ,[11) $\bar{A}$ ハ任意ノ $g \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathbb{M}$ ニ對シテ

$$\bar{A} B g = B \bar{A} g$$

ヲ滿足スル. 故ニ $A' = \bar{A} P_{\mathfrak{N}}$ トオケバ, $A' \in \mathbb{M}^c$ デアッテ

$$A = A'E = A'_{(E)}$$

スナハチ $(\mathbb{M}_{(E)})^c \subseteq (\mathbb{M}^c)_{(E)}$ デアル。

2) $A \in \mathbb{M}^c_{(F)}$ $\quad A_{(E)} = EAE$ ヲ對應サセル對應 $A \to A_{(E)}$ ガ $\mathbb{M}^c_{(F)}$ ヲ $\mathbb{M}^c_{(E)}$ ヘ寫ス代數的 *homomorphism* ナルコトハ明ラカデアル. 今ココデ $A_{(E)} = 0$ デアッタトスレバ §1. *lemma* 1.3 ニヨッテ $AF = 0$, スナハチ $A = 0$ デナケレバナラヌ。故ニ $A \to A_{(E)}$ ハ *isomorphism* デアル. (証明終)[12)

一般ニ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ガ $\mathbb{M}$ ナルトキ $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}\,(\mathbb{M})$ ナラバ $P_{\mathfrak{M}} \simeq P_{\mathfrak{N}}\,(\mathbb{M})$ ト書キ, 又 $D_{\mathbb{M}}(P_{\mathfrak{M}}) = D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ニヨ

---

11) $P_{\mathfrak{N}} = E_{\mathfrak{N}}$ デアル.

12) $\dot{A}_{(E)}$ ガ與ヘラレタトキ對應スル A ハ, 証明 1) ニ於ケル方法デ定義シタ $(\overline{A_{(E)}})\, P_{\mathfrak{N}}$ ト一致スル.

ッテ projection $P_{\mathfrak{N}}$ ノ dimension ヲ定義スル.
$E \precsim F(\mathbb{M})$ ハスナハチ $E = W^*W$, $F \geqq WW^*$ ナル $W \in \mathbb{M}$ が存在スルコトニ他ナラナイ. $\precsim$ ナル関係ハ従ッテ $\mathbb{M}$ ノ代数的構造ニヨッテ定マルノデアル. $D_{\mathbb{M}}(E)$ モ亦 $\mathbb{M}$ ノ代数的構造デ定マル. 何トナレバ $D_{\mathbb{M}}$ ハ

$$\begin{cases} \text{i)} & W \in \mathbb{M} \text{ ナラバ } D_{\mathbb{M}}(W^*W) = D_{\mathbb{M}}(WW^*), \\ \text{ii)} & (D_{\mathbb{M}}(E))_{(E_Z)} > 0 \\ \text{iii)} & E \text{ が有限ナラバ } D_{\mathbb{M}}(E) < +\infty \\ \text{iv)} & E \cdot F = 0 \text{ ナラバ } D_{\mathbb{M}}(E+F) = D_{\mathbb{M}}(E) + D_{\mathbb{M}}(F) \end{cases}$$

ナル代数的ナ條件式ニヨッテ特徴付ケラレルカラデアル。

Lemma 2.1. $E_0 \in \mathbb{M}$ トスル. $E, F \in E_0 \mathbb{M} E_0$ ナルトキ $E \precsim F(\mathbb{M})$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ $E_{(E_0)} \precsim F_{(E_0)}\left(\mathbb{M}_{(E_0)}\right)$ ナルコトデアル.

証明. 充分ナルコトハ明ラカデアル. 逆ニ $E \precsim F(\mathbb{M})$ トスレバ $E = W^*W$, $F \geqq WW^*$ ナル $W \in \mathbb{M}$ が存在スル. 然ルニ $E \leqq E_0$, $F \leqq E_0$ デアルカラ $W = E_0 W E_0$ デアル.

故ニ $E_{(E_0)} \precsim F_{(E_0)}\left(\mathbb{M}_{(E_0)}\right)$. (証明終)

$E_0 \in \mathbb{M}$, $(E_0)_Z = I$ トスル. スルト $A \to A_{(E_0)} =$

ヨッテ $\mathbb{M}^c$ ト $\mathbb{M}^c_{(E_0)}$ ハ代數的ニ *isomorphic* ナルカラ

$$\mathbb{Z}_{(E_0)} = \mathbb{M}_{(E_0)} \frown \mathbb{M}^c_{(E_0)}$$

トナル。故ニ *dimension functional* ハ代數的構造ニヨッテ定マルコトニ注意スレバ, *Lemma* 2.1 ニヨッテ

$$D(E_{(E_0)}) = D_{\mathbb{M}}(E)_{(E_0)}, \quad E \in E_0 \mathbb{M} E_0$$

ニヨッテ定義サレタ D ハ $\mathbb{M}_{(E_0)}$ ニ於ケル *dimension functional* デアル。又 $A \to A_{(E_0)}$ ニヨッテ $\mathbb{M}^c \cong \mathbb{M}^c_{(E_0)}$ ナルコトカラ

$$D^c(F_{(E_0)}) = D_{c\mathbb{M}}(F)_{(E_0)}, \quad F \in \mathbb{M}^c$$

ニヨッテ定義サレタ D^c ガ $\mathbb{M}^c_{(E_0)}$ ノ *dimension functional* ヲナス事ガ分ル.

$$[\mathbb{M}^c_{(E_0)} f] = [\mathbb{M}^c E_0 f] = [\mathbb{M}^c f]$$

デアルカラ

$$D([\mathbb{M}^c_{(E_0)} f]) = D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f])_{(E_0)}$$

ガ成立スル. 又

$$[\mathbb{M}_{(E_0)} f] = [E_0 \mathbb{M} f] = E_0 [\mathbb{M} f]$$

ナル故, $[\mathbb{M}_{(E_0)} f]$ ノ *projection* ヲ F_0 トスレバ

$$F_0 = E_0 P_{[\mathbb{M} f]} = (P_{[\mathbb{M} f]})_{(E_0)}$$

故ニ

$$D^c([\mathbb{M}_{(E_0)} f]) = D^c(P_{[\mathbb{M} f](E_0)})$$

$$= D_{C\mathbb{M}}(P_{[\mathbb{M} f]})_{(E_0)}$$

以上ノ結果ヲ $\mathbb{M}$ ト $\mathbb{M}^c$ ニ関シテ二重ニ適用スレバ次ノ定理ガ得ラレル：

定理1.1　$E_0 \in \mathbb{M}$, $F_0 \in C(\mathbb{M})$, $(E_0)_Z = (F_0)_Z = I$ トスル. 然ルトキハ

$$C(\mathbb{M}_{(E_0 F_0)}) = (C\mathbb{M})_{(E_0 F_0)}$$

デアッテ, $A \to A_{(E_0 F_0)}$ ナル對應ニヨッテ

$$\begin{cases} E_0 \mathbb{M} E_0 \cong \mathbb{M}_{(E_0 F_0)}, \\ F_0 \mathbb{M}^c F_0 \cong \mathbb{M}^c_{(E_0 F_0)}, \\ \qquad \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{(E_0 F_0)} \end{cases}$$

トナル. D, D^c ヲ

$$\begin{cases} D(E_{(E_0 F_0)}) = D_{\mathbb{M}}(E)_{(E_0 F_0)}, \\ \qquad\qquad E \in E_0 \mathbb{M} E_0; \\ D^c(F_{(E_0 F_0)}) = D_{C\mathbb{M}}(F)_{(E_0 F_0)}, \\ \qquad\qquad F \in F_0 \mathbb{M}^c F_0 \end{cases}$$

ト定義スレバ, D, D^c ハ夫々 $\mathbb{M}_{(E_0 F_0)}$, $\mathbb{M}^c_{(E_0 F_0)}$ ニ於

ケル dimension functional デアッテ,

$f \in \mathfrak{H}_{(E_0 F_0)} = E_0 F_0 \mathfrak{H}$ ニ對シテ

$$\begin{cases} D([\mathbb{M}^c_{(E_0F_0)} f]) = D_{\mathbb{M}}([\mathbb{M}^c f])_{(E_0F_0)}, \\ D^c([\mathbb{M}_{(E_0F_0)} f]) = D_{C\mathbb{M}}([\mathbb{M} f])_{(E_0F_0)} \end{cases}$$

ガ成立スル。

2.3. コノ節デハ $\mathbb{M}$ ヲソノ部分環ノ上ノ行列環トシテ表現スルコトヲ論ズル. 先ヅ行列環ノ定義ヲ述べヨウ.[13] $\overline{\mathfrak{H}}$ ヲ有限次元又ハ無限次元ノ Hilbert 空間, n, m ヲ $1 \leqq n \leqq \infty$, $\leqq m \leqq \infty$ ナル與ヘラレタ整数(n = ∞ 或ハ m = ∞ ノ場合モ含メテオク!) トスル. $\overline{\mathfrak{H}}$ ノ element カラ成ル (n, m)・型ノ matrix:

$$f = (\bar{f}_{j,p};\ 0 \leqq j < n,\ 0 \leqq p < m)$$

デアッテ

$$\sum\sum \|\bar{f}_{jp}\|^2 < +\infty$$

ナルモノノ全体ハ

$$(f, g) = \sum\sum(\bar{f}_{jp}, \bar{g}_{jp})$$

ヲ内積トスル Hilbert 空間ヲ作ル. 吾々ハコノ Hilbert

---

13) 行列環ノ詳シイコトニツイテハ Rings of Operators, Part I, Chap II 及ビ III 參照.

空間ヲ $n \times \overline{\mathfrak{H}} \times m$ デ表ヘスコトニシ

$$\mathfrak{H} = n \times \overline{\mathfrak{H}} \times m$$

トオク。$\mathfrak{H}$ ノ有界ナ linear operator A ハ

$$(Af_{jp}) = \Big(\sum_{k}\sum_{q} \bar{A}_{jkpq} f_{kq}\Big)$$

ナル $\overline{\mathfrak{H}}$ ノ有界 operator ノ tensor $(\bar{A}_{jkpq})$ デ表ハサレル。コノトキ吾々ハ

$$A = (\bar{A}_{jkpq})$$

ト書クコトニスル。$\overline{\mathfrak{H}}$ ニ於テ任意ノ opertor ring $\overline{\mathbb{M}}$ ガ与ヘラレタトシテ，$n \times \overline{\mathbb{M}}$，$\overline{\mathbb{M}}^c \times m$ ヲ

$$\begin{cases} n \times \overline{\mathbb{M}} = (A;\ A = (\bar{A}_{jk}\delta_{pq}),\ \bar{A}_{jk} \in \overline{\mathbb{M}}), \\ \overline{\mathbb{M}}^c \times m = (A;\ A = (\delta_{jk}\bar{A}_{pq}),\ \bar{A}_{pq} \in \overline{\mathbb{M}}^c) \end{cases}$$

ト定義スル。Matric ノ記法ヲ使ヘバスナハチ

$$n \times \overline{\mathbb{M}} = (A;\ Af = (\bar{A}_{jk})(\bar{f}_{kp}),\ \bar{A}_{jk} \in \overline{\mathbb{M}}),$$

$$\overline{\mathbb{M}}^c \times m = (A;\ Af = (\bar{f}_{jp})(\bar{A}_{pq}),\ \bar{A}_{pq} \in \overline{\mathbb{M}}^c)$$

デアル。容易ニ確メラレル如ク

$$c\,(n \times \overline{\mathbb{M}}) = (\overline{\mathbb{M}}^c \times m)$$

デアル。コレヨリ直テニ $n \times \overline{\mathbb{M}}$，$\overline{\mathbb{M}}^c \times m$ ガ $\mathfrak{H}$ ニ於ケル operator ring ナルコトガ分ル。$n \times \overline{\mathbb{M}}$ ヲ $\overline{\mathbb{M}}$ ノ上ノ n 次ノ行列環ト名付ケル。$n \times \overline{\mathbb{M}}$ ハ uniform topology 或ハ strongest topology ニ関シ

テハ m ノ如何ニ関セズスベテ topiologically isomorphic デアルが, strong 又ハ weak topology ニ関シテハ, $m=\infty$ ニ對スル $n\times\overline{\mathbb{M}}$ ト $m<+\infty$ ノトキノ $n\times\overline{\mathbb{M}}$ が必ズシモ homoomorphic ニナラナイ. ソコデ吾々ハ特ニ $m=1$ ニ対スル $n\times\overline{\mathbb{M}}$ ヲ $\overline{\mathbb{M}}_n$ ト書クコトニスル。

$$\overline{\mathbb{M}}_n = n\times\overline{\mathbb{M}} \qquad (m=1)$$

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 及ビ $\mathfrak{H}$ ノ operator ring $\mathbb{M}$ が與ヘラレタトキ

$$\mathfrak{H} = n\times\overline{\mathfrak{H}}\times m,\quad \mathbb{M} = n\times\overline{\mathbb{M}},$$
$$\mathbb{M}^c = \overline{\mathbb{M}}^c\times m$$

ナル $\overline{\mathfrak{H}}$, $\overline{\mathbb{M}}$ が存在スルナラバ

$$\begin{cases} E_\nu = (\delta_{j\nu}\,\delta_{k\nu}\,\delta_{pq}), & (0\leqq\nu<n); \\ F_\nu = (\delta_{jk}\,\delta_{p\nu}\,\delta_{q\nu}), & (0\leqq\nu<m) \end{cases}$$

デ定義サレタ E_ν, F_ν ハ明ラカニ

$$\begin{cases} E_\nu \sim E_\mu\,(\mathbb{M}), & E_\nu\cdot E_\mu = 0\ (\nu\neq\mu), \\ F_\nu \sim F_\mu\,(\mathbb{M}^c), & F_\nu\cdot F_\mu = 0\ (\nu\neq\mu), \end{cases}$$

$$\sum F_\nu = 1$$

ヲ満足スル. 逆ニ

定理 12. $\mathbb{M}$ が

$$E_\nu \sim E_\mu(\mathbb{M}),\quad E_\nu \cdot E_\mu = 0\ (\nu \neq \mu),$$

$$\sum E_\nu = 1$$

ナル n 個ノ projection E_ν ヲ含ミ, $\mathbb{M}^c$ ガ

$$F_\nu \sim F_\mu(\mathbb{M}^c),\quad F_\nu \cdot F_\mu = 0\ (\nu \neq \mu),$$

$$\sum F_\nu = 1$$

ナル m 個ノ F_ν ヲ含ムナラバ, $\mathfrak{H}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^c$ ハ

$$\mathfrak{H} = n \times \overline{\mathfrak{H}} \times m,\quad \mathbb{M} = n \times \overline{\mathbb{M}},$$
$$\mathbb{M}^c = \overline{\mathbb{M}}^c \times m$$

ノ形ニ表ハサレ, E_ν, F_ν ハ

$$E_\nu = (\delta_{j\nu}\,\delta_{k\nu}\,\delta_{pq}),\quad F_\nu = (\delta_{jk}\,\delta_{p\nu}\,\delta_{q\nu})$$

トナル。

証明.[15] 假定ニヨッテ

$$\begin{cases} E_\nu = W_\nu W_\nu^*, & E_0 = W_\nu^* W_\nu, \quad W_\nu \in \mathbb{M}; \\ F_\nu = W_\nu' W_\nu'^*, & F_0 = W_\nu'^* W_\nu', \quad W_\nu' \in \mathbb{M}^c \end{cases}$$

ナル partially isometric operator W_ν, W_ν' ガ存在スル。

15) 1 ヲ含ム algebra A ハ, 行列単位 e_{jk} ヲ含ムナラバ部分環ノ上ノ行列環トシテ表ハサレル。ココデ述ベル証明ハコノ代数学ニオケル定理ノ証明ト全ク同ジデアル。

$$\mathfrak{H}^{\nu\rho}=E_\nu F_\rho \mathfrak{H},\quad W_{\nu\mu\rho\sigma}=W_\nu W^*_\mu W'_\rho W'^*_\sigma$$

トオケバ，$W_{\nu\mu\rho\sigma}$ ハ $\mathfrak{H}^{\mu\sigma}$ ヲ $\mathfrak{H}^{\nu\rho}$ ニ *isomorphic* ニ写ス．而モ

$$W_{\nu\alpha\rho\beta}W_{\alpha\mu\beta\sigma}=W_{\nu\mu\rho\sigma}$$

ナル関係ガアル．故ニコノ *isomorphism* ニヨッテ

$$\overline{\mathfrak{H}}\cong \mathfrak{H}^{\nu\rho}\cong \mathfrak{H}^{\mu\sigma}\cong\text{------}$$

ナル空間 $\overline{\mathfrak{H}}$ ガ定マル．又コノ *isomorphism* $\mathfrak{H}^{\nu\rho}\cong\mathfrak{H}^{\mu\sigma}$ ニヨッテ

$$E_\nu F_\rho \mathbb{M} E_\nu F_\rho \cong E_\mu F_\sigma \mathbb{M} E_\mu F_\sigma,$$

$$E_\nu F_\rho \mathbb{M}^c E_\nu F_\rho \cong E_\mu F_\sigma \mathbb{M}^c E_\mu F_\sigma$$

トナル．従ッテ，定理11 ヲ想起スレバ

$$\overline{\mathbb{M}}\cong E_\nu F_\rho \mathbb{M} E_\nu F_\rho \cong \mathbb{M}_{(E_\nu F_\rho)}\cong E_\nu \mathbb{M} E_\nu,$$

$$\overline{\mathbb{M}}^c\cong E_\nu F_\rho \mathbb{M}^c E_\nu F_\rho \cong \mathbb{M}^c_{(E_\nu F_\rho)}\cong F_\rho \mathbb{M}^c F_\rho$$

ナル $\overline{\mathfrak{H}}$ ノ *operator ring* $\overline{\mathbb{M}}$ ガ定マルコトガ分ル．

$\overline{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}^{\nu\rho}$ ナル *isomorphism* ニヨッテ $\bar{f}\in\overline{\mathfrak{H}}$ ニ対応スル $\mathfrak{H}^{\nu\rho}$ ノ元ヲ $f^{\nu\rho}$ ト書クコトヽシ，$\overline{\mathfrak{H}}$ ノ *operator* $\overline{A}$ ニ対応スル $\mathfrak{H}^{\nu\rho}$ ノ *operator* ヲ $A^{\nu\rho}$ デ表ハス．$\mathfrak{H}$ ノ *element* f ハ $f=\sum\sum E_\nu F_\rho f$ ト表ハサレル．従ッテ f ニ対シテ $\bar{f}_{\nu\rho}$ ヲ $E_\nu F_\rho f=f_{\nu\rho}$ ナル様ニ定メレバ

f ハ matrix $(\bar{f}_{\nu\rho})$ デ表ハサレル。故ニ

$$f = (\bar{f}_{\nu\rho}), \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{h}} \times \mathfrak{m}$$

ト考ヘラレル。$\mathfrak{h}$ ノ operator A ハコノトキ

$$A = (\bar{A}_{jkpq}), \quad A^{\nu\rho}_{jkpq} = {}^{*}W_{\nu j \rho p} A W_{k\nu q\rho}$$

デ表ハサレル。$A \in \mathbb{M}$ ナラバ

$$A^{\nu\rho}_{jkpq} = W_{\nu j\rho p} A W_{k\nu q\rho} = F_\rho \cdot W_\nu W_j^* A W_k W_\nu^* \delta_{pq}$$

デアルカラ A ハ $(\bar{A}_{jk}\delta_{pq})$ ナル形ヲモツ。即チ

$$\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{n} \times \bar{\mathbb{M}}$$

デアル。同様ニ $\mathbb{M}^c \subseteq \bar{\mathbb{M}}^c \times \mathfrak{m}$ ナルコトガ示サレル。故

ニ

$$\mathbb{M} = \mathfrak{n} \times \bar{\mathbb{M}}, \quad \mathbb{M}^c = \bar{\mathbb{M}}^c \times \mathfrak{m}$$

デナケレバナラナイ。$E_\nu = (\delta_{j\nu}\delta_{k\nu}\delta_{pq})$,

$F_\nu = (\delta_{jk}\delta_{p\nu}\delta_{q\nu})$ トナルコトハ明ラカデアラウ。

(証明終)

(ツヅク)