1094. Fréchet束ソノ他ニ関スル二三ノ注意

小笠原 藤次郎(廣島文理大)

Fréchet束ソノ他ニツイテ書キモラシタ二三ノ注意ヲ述ベルノが目的デアル。

§1. Banach束トナル條件

Banach空間が，一方ニ於テベクトル束デアルトキBanach束トナル樣ニノルムが導入サレルカ否カニ就イテ次ノ定理が成立ツ。

定理1. ベクトル束Xが Banach空間ノトキ，位相ヲ變ヘナイヤウニ必要アラバ新シイノルムノ導入ニヨッテBanach束トナル條件ハ，ノルムニヨル收斂ト相對一樣(X)收斂が同義トナルコトデアル。

(証) Birkhoff, Lattice theory, 定理7.21[1] ニヨリ條件が必要ナルコトハスグ判ル。以下充分ナルコトノ証明。Xノ與ヘラレタノルムヲ$\|x\|$デ表シ $\|x\| = l.u.b.(\|x'\|;\ |x'| \leqq |x|,\ x' \in X)$ ト定メルト，次ノ(1)−(5)が成立ツ。

(1) $0 \leqq \|x\|_1 \leqq +\infty$, $x=0$ ノトキニ限リ $\|x\|_1 = 0$

(2) $\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\,\|x\|_1$, αハ0デナイ實數

---

(1) ノルムニヨル收斂ト相對一樣(X)收斂ノ同義ヲ述ベタモノデアル。F−束ニツイテハ，小笠原藤次郎，紙數誌，243号，Frechet束ニ就テ，§1，補題5參照.

(3) $\|x+y\|_1 \leqq \|x\|_1 + \|y\|_1$,

(4) $\|x\| \leqq \|x\|_1$,

(5) 任意ノ正数εニ對シ，正数δガ存在シ，$\|x\| \leqq \delta$ ノトキ常ニ$\|x\|_1 \leqq \varepsilon$

コノウチ(1)，(2)，(4)ハ自明．(3)ハ，$|z| \leqq |x+y|$ ナル任意ノzニ對シ，x'，y'ヲ$x'_+ = z_+ \frown |x|$，$x'_- = z_- \frown |x|$；$y' = z - x'$ト選ブト $\|z\| \leqq \|x'\| + \|y'\| \leqq \|x\|_1 + \|y\|_1$ カラスグ判ル。(5)ハ，アル正数εニ対シ，$\|x_n\| \downarrow 0$，$\|x_n\|_1 > \varepsilon$ トスレバ $|x_{i_n}| \leqq \lambda_n u$，$\lambda_n \downarrow 0$ ナル正要素u及ビ正数列$\{\lambda_n\}$ガ存在スル。$\|x'_{i_n}\| > \varepsilon$，$|x'_{i_n}| \leqq |x_{i_n}|$ ナルx'_{i_n}ガ存在スルカラ $|x'_{i_n}| \leqq \lambda_n u$ トナリ $\|x'_{i_n}\| \to 0$ トナリ，$\|x'_{i_n}\| > \varepsilon$ ニ反スル。

(5)ノ成立カラ$\|x\|_1 < +\infty$トナリ，$\|x\|_1$ニヨッテXハBanach束トナリ 且ツ$\|x\|$ニヨルBanach空間ト考ヘタメトBanachノ意味デ同型ニナル。

(注意) ベクトル束ハ，如何ナル方法ニヨッテBanach束ニナッテモ，Banachノ意味デ同型デアル。

同ジ論法ヲF型空間ニ適用スルト次ノ定理ヲ得ル。

定理2. ベクトル束ガF型空間ノトキ，位相ヲ変ヘナイヤウニ必要アラバ新シイ計量ノ導入ニヨッテF－束ニナル條件ハ計量ニヨル收斂ト相對一様(米)收斂ガ同義トナルコトデアル。

（注意） ベクトル束ガF－束トシテノ計量ハ，Banachノ意味ノ同型トイフコト以外ニハ一意ニ定マル。

次ノ節デハ，K_6型"正則"ベクトル束ガBanach束トナルトキハ，K－空間（Kantorovitch空間）トナルコトヲ使フ。

§2. Orlicz ノ空間

$M(u)$ヲスベテノ実数uニ對シ定義サレタ凸函数デ次ノ$1°-4°$ヲ満足スルモノトス。（Banachノ本，227頁）

$1°.\quad M(-u)=M(u)$

$2°.\quad \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}M(u)=0$

$3°.\quad \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}M(u)=+\infty$

$4°.\quad \overline{\lim_{u\to+\infty}}\frac{1}{M(u)}M(2u)<+\infty$

コノ$M(u)$ニ対シ，$N(u)$ヲ，$v\geqq 0$ノトキ

$N(v)=\max_{0<u<+\infty}[uv-M(u)]$，$v<0$ノトキ$N(v)=N(-v)$ト定メルトN(u)ハ凸函数デ$1°, 2°, 3°$ガ成立ツガ一般ニハ$4°$ハ成立シナイ。

$[0,1]$上ノ可測函数ノウチ$\int M(x(t))dt<+\infty$ナルモノノ全体ヲ(O)デ表シ，$x\in(O)$ノノルムヲ

$$\|x\| = l.u.b.\left(\int_0^1 x(t)\omega(t)dt;\ \int_0^1 N(\omega(t))dt \leqq 1\right)$$

デ定メルトキ(O)ハ Banach 束ニナル。(証明ハ例ヘバ Zygmund, Trigonometrical series, 96—97) (O)ヲ定義スルノニ, $M(u)$ ガ $4°$ ヲ更ニツヨクシタ $M(2u) \leqq CM(u)$ ヲ満足スルモノトシテヨイ。(Orlicz, Studia, Math. 5(1934), 128). 從ッテ (O)ハ K_b型正則″ベクトル束デアル。小笠原, Fréchet 束ニ就イテ(Ⅲ), 紙数誌 245 ?)

故ニ Banach 束トシテ(O) 空間ハ K-空間ニナル。$N(u)$ ガ $4°$ ヲ満足スルトキ. (O)空間ノ共軛空間ガK-空間トナリ (O)-空間ハ Banach 空間トシテ 正則(regular, reflexive)デアル。

($4°$) ノ代リニ, $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{1}{M(u)}M(2u) < +\infty$ ヲ満足スルトキ $\displaystyle\sum_1^\infty M(\xi_n) < +\infty$ ナル $x=\{\xi_n\}$ ノ全体ヲ (o) デ表シ,

$$\|x\| = l.u.b.\left(\sum \xi_n \omega_n;\ \sum N(\omega_n) \leqq 1\right)$$

トスルトキ (o) ハ K-空間ニナル。特ニ $N(u)$ ガ $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}N(u) = 0$ ヲ満足スルトキハ (o) ハ Banach 空間トシテ正則デアル。(Banach ノ本, 240頁ヲ参照)

$(-\infty, +\infty)$ ノ上デ論ズルニハ, $M(u)$ ガ $4°$ ノ代リニ $M(2u) \leqq CM(u)$ ヲ満足スル場合ヲ考ヘル。コノトキ $(-\infty,$

$+\infty$) 上ノ可測函數 $x(t)$ ノ中デ, $\int_{-\infty}^{+\infty} M(x(t))\,dt < +\infty$ ナル

モノノ全体ハ $\|x\| = l.u.b.\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\omega(t)\,dt;\ \int_{-\infty}^{+\infty} N(|\omega(t)|)\,dt \leqq 1\right)$ ニヨリ Banach 束トナリ, K-空間ニナル. $N(u)$ ガ $N(2u) \leqq C_1 N(u)$ ヲ満足スルトキ, コノ空間ハ Banach 束トシテ正則ニナル.

以上ハ, abstract set ノ上デ測度函數ガ與ヘラレテイル場合ニモ, 上ノ所論ニ並行シテ, 所論ヲ拡張スルコトガ出来ル. 反覆シテ論ズルコトハ煩ハシイカラ略スル。

§3. Kantorovitch 空間ニ對スル一二ノ注意.

共軛 Banach 束ガ K-空間ニナル充分條件ニツイテ紙數誌 240ノ談話 1060, §5ノ所論ノ一部ヲ拡張スル。

定理1: Banach 束 X ニ於テ, ノルムデ有界ナ集合カラ弱位相デ, 基本列ガトリ出セルトキ, $\overline{X}$ ハ K-空間デアル。

(証) $\overline{X}$ ガ K-空間トナルコトヲ云フニハ, $f_n \downarrow 0$. $f_n \in \overline{X}$ ノトキ $\|f_n\| \to 0$ ヲ云ヘバヨイ。$\|f_n\| > \delta > 0$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ トスレバ, $f_n(x_n) > \delta$, $x_n > 0$, $\|x_n\| = 1$ ナル X カラノ列 $\{x_n\}$ ガアル. 假定ニヨリ $\{x_n\}$ ハ弱位相ニヨル基本列ヲ作レトシテ差ハナイ. $\xi(f) = \lim f(x_n)$

ト定義スルト，$\xi(f)$ ハ $\overline{X}$ ノ (o)－連続線型汎函数デアル．（談話 1060，ミナト同論法デ）．明カニ $\xi(f_n)\geqq\delta$．然ルニ $\lim_n \xi(f_n)=0$ ナル故ニ矛盾ガ起ル。

定理2. Banach 束 X ニ於テ，$\overline{\overline{X}}$ ノ任意ノ要素 ξ ガ X ノ要素列ノ弱極限トシテ表サレルトキ $\overline{X}$ ハ K－空間デアル。

（証）定理1ト同ジ考ヘ方デ（ξ トシテ $\{x_n\}$ ノ弱収積点ノ一ツトスレバヨイ）。

定理3. X ヲ Banach 束トスル．$\overline{X}$ ノ任意ノ可分部分 Banach 束ガ σ－完全ナルトキニ限リ $\overline{X}$ ハK－空間デアル。

（証）定理1ノ証明法ヲ少シ修正シテ．

§4 可測函数族ニヨルアル種ノベクトル束ノ表現

[0, 1] 上ノアル可測函数族ノベクトル束ニヨリ表現サレルベクトル束ニツイテ考ヘル。

X ヲ可分K－空間又ハK－空間トセヨ。X ノ可分カラ X ハ単位ヲモツ．之レヲ e トスル．X ガ K^- 空間ナルコトカラ，$\overline{X}$ モ単位 $\overline{e}$ ヲモツ．$\overline{e}$ ヲ $\overline{e}(e)=1$ ナル如ク選ブ。X ノ表現ブール空間 Ω ヲ考ヘ，e ヲ恒等的ニ1トスル様 X ヲ Ω ノ第一種集合上ヲ除イテ有限値ヲトル Ω 上ノ連続函数ノベクトル束デ表現スル。Ω ノ基本開集合（開且ツ閉集合ノコト）ト第一種集合ヲ法トシテ一致スル集合 E ニ

對シ，コノ基本開集合ノ特性函數ヲ表現函數トスルXノ要素〔eニ關スル特性要素トナツテヰル〕ヲ$\mu(E)$デ表ハス。$\mu(E)$ハ完全加法的デアル。$m(E)=\overline{e}(\mu(E))$ト置クト，$m(E)$ハ$\Omega$ノ完全加法的測度函數トナリ，$m(E)=0$トEガ第一種集合トハ同義デアル。

今簡單ノタメeニ關スル原子的特性要素ガ存在シナイトスル。Ωノ零測度集合ノ全体ヲNトシ，可測集合ノ体ヲMトスレバ，完全ブール代數M/Nハeニ關スル特性要素ノブール代數ト同型デアル。M/Nハヨク知ラレタ方法デ，$[0,1]$上ノ零測度集合ヲ法トシタ*Lebesgue*可測集合ノブール代數ト測度ヲ保存スル束同型ニナル。(M/Nハ$m(E)$ニヨリ導入サレタ距離ニ關シ可分空間ヲ作ルコトニ注意)。

從ツテeニ關スル特性要素ト零測度集合ヲ法トシタ$[0,1]$上ノ可測集合トハ一對一對應スル。$[0,1]$上及ビΩ上ノ可測函數ハ同値ナ函數ヲ法トシテ*Wecken*ニヨル特性族ニヨリ一意ニ定マルカラ，Ω上ノ殆ンド到ル所有限値ヲトル可測函數，從ツテ第一種集合上ヲ除イテ有限値ヲトル連續函數ノ全体L_Ωト$[0,1]$上ノ可測函數ノS空間トハベクトル束トシテ同型デアル。

$x\in X$ノ表現函數ヲ$f_x(\xi)$，之ニ對スルSノ函數ヲ$x(t)$トスレバ$\overline{e}(x)=\int_\Omega f_x(\xi)\,dm=\int_0^1 x(t)\,dt$トナリ，

$x(t)$ ハ $[0,1]$ 上可積分函数ノ空間 L ノ要素トナル。即チ X ハ L ノ部分ベクトル束デ表現サレル。（X ガ抽象 L_p 空間（$1 \leqq p < +\infty$）ノ場合ニハ，e, $\bar{e}$ ヲ適當ニトルト，$x(t)$，ノルムガ普通ノ L_p 空間ノノルムトナル）。任意ノ $\bar{x} \in \bar{X}$ ノ表現函数ヲ調ベル。X ノヨウナ表現ヲ利用シテモ容易ニ判ルガ，次ノヤウニシテモヨイ。X ト $\bar{X}$ ハ同ジ表現デール空間ヲモツ。$\bar{e}$ ヲ恒等的ニ 1 トスル $\bar{X}$ ノ Ω 上ノ表現ヲ考ヘ，$\bar{x} = f_{\bar{x}}(\xi)$ ガ對應スルトスル。之レニ對應スル S ノ函数ヲ $\bar{x}(t)$ トスレバ

$$\bar{x}(x) = \int_{\Omega} f_x(\xi) f_{\bar{x}}(\xi)\, dm = \int_0^1 x(t)\bar{x}(t)\, dt$$

トナル。

$\bar{X}$ ハ S ノ部分ベクトル束デ表サレル。X ハ S ニ對シ如何ナル座標ニアルカトイフニ，$\rho(x) = \left\| \dfrac{x}{e+|x|} \right\|$ ニヨッテ X ノ計量的完備化ヲ考ヘ，之レヲ X_S トスレバ X_S ノ表現函数ハ $\mathcal{L}_\Omega$ ノ全体カラナリ，$[0,1]$ 上ノ S ト Banach ノ意味デ同型ニナル。

次ニ e ニ関スル原子的特性要素ガ存在スルトキハ，X ヲ列空間ト上述ノ空間ノ直和トシテ論ズレバヨイ。

要スルニ可分 K－空間，K－空間或ハソノ共軛空間ハ $[0,1]$ ノ可測函数或ハ列ニヨル空間ノ議論ニ帰結スルコトガイヘタワケデアル。