1092. 淡中氏ノ Hauptgeschlechtssatz im Minimalen ニツイテノ一注意

中山　正（名大）

淡中氏ハ談話1046ニオイテ，大変興味アルHauptgeschlechtssatz im Minimalen（Noether トハ違ッタ所ノ）ヲ証明シテ居ラレマス．即チ$\mathfrak{p}$進數体kノ上ノあーべる拡大K/k，ソコノ因子團$a_{\sigma,\tau}$デ對應スル接合積が多元体ニナルヤウナモノヲ考ヘル．ソノトキKノ$N_{K/k}(A)=1$ナル元Aハ常ニ$B^{1-\sigma}$ノ形ノ元イクツカ，$a_{\sigma,\tau}/a_{\tau,\sigma}$ナル形ノ元イクツカノ積ニナル（逆モ成立ツ）トイフノが淡中氏ノ定理デアリマス。

以下コレノK/kが一般ノがろあ拡大デアル場合ヘノ拡張ヲ考ヘヨウト思ヒマス．但シ上記定理ノ拡張ヲスルトスレバ，淡中氏ノ指摘シテ居ラレマスヤウニ，交換子群ノ方ニツイテイタスノが意味ノアル拡張デアリマセウが，以下ハ少シ形式的ナ単ニ因子團ニツイテノ興味カラノ拡張デアリマス。

先ヅ因子團ハ以下デハ淡中氏ノト係數ノ左右ヲカヘテ，從ッテ

$$a_{\rho,\sigma\tau}a_{\sigma,\tau}=a_{\rho\sigma,\tau}a_{\rho,\sigma}^{\tau}$$

ノ形ニトッテオキマス，サテ

k ヲ p 進数体，K/k ヲガロア拡大デソノガロア群ヲ $\mathfrak{g}$，$a_{\sigma,\tau}$ ヲ K/k ノ因子団デ対応スル接合積ガ多元体ニナルモノトスル。シカラバ $N_{K/k}(A)=1$ ナル元 A ハ常ニ

$$b^{1-\rho} \qquad (b\in K,\ \rho\in\mathfrak{g})$$

ナル形ノイクツカノ元，ソレカラ

$$b_{\sigma,\tau}/b_{\tau,\sigma}\left(\begin{array}{l}\sigma,\tau\in\mathfrak{g},\ \text{シカシテ}\ (b)\ \text{ハ}\ (a)\ \text{ニ}\\ \text{同伴：}\ (b)\sim(a)\ \text{デアリ，シカシ}\\ \text{テ}\\ \qquad b_{\sigma\tau,\mathfrak{g}}/b_{\tau\sigma,\mathfrak{g}}=1\end{array}\right)$$

ナル形ノ元イクツカ，ノ積トシテ表ハサレル。逆モ成立ツ。

トイフノガ証明シヨウトスル拡張デアリマス。（ココニ $b_{\sigma,\mathfrak{g}}$ ハ $\prod_{\rho\in\mathfrak{g}} b_{\sigma,\rho}$ ノ略記）。特ニモシ $\mathfrak{g}$ ガアーベル的ナラバ上ノ括弧ノ中ノ最後ノ附帯條件ハ常ニミタサレテ居リ，マタ $(b)\sim(a)$ ナルトキハ

$$b_{\sigma,\tau}=a_{\sigma,\tau}\,l_\sigma^{\tau}\,l_\tau/l_{\sigma\tau}$$

デ（ヤハリ $\mathfrak{g}$ ガアーベルトシテ）

$$\frac{b_{\sigma,\tau}/b_{\tau,\sigma}}{a_{\sigma,\tau}/a_{\tau,\sigma}}=\frac{l_\tau^{1-\sigma}}{l_\sigma^{1-\tau}}$$

トナッテ，コノ比ハ $b^{1-\lambda}$ ノ方ニ吸収サレマスカラ (a) ト同様ナモノヲ色々探ル必要ハナク，(a) ノミデヨク、従ッテ淡中氏ノ定理ノ形ニナルワケデアリマス。

ナホ，(一般ノがろあノ場合ニモドッテ) 上記ノ括弧ノ中ノ附帯條件ハタゞあーべるノ時ニ常ニミタサレテオルコトが眼ニ見ヘル形ニカイタマデデアリマシテ，

$$b_{\rho,\mathfrak{g}}\, b_{\sigma,\mathfrak{g}} = b_{\rho\sigma,\mathfrak{g}}\, b_{\rho,\sigma}^{\mathfrak{g}}$$

(ノ ρ, σ ヲソレゾレ σ, ρ ニカヘタ式) カラ直チニワカル

$$N_{K/k}\left(b_{\rho,\sigma}/b_{\sigma,\rho}\right) = b_{\sigma\rho,\mathfrak{g}}/b_{\rho\sigma,\mathfrak{g}}$$

ナル関係が示ス如ク，単ニ $N_{K/k}\left(b_{\sigma,\tau}/b_{\tau,\sigma}\right) = 1$ ナル如キ $b_{\sigma,\tau}/b_{\tau,\sigma}$ ト云フコトニスギマセン。従ッテ定理ノ逆ノ方ハ勿論自明デアリマス。

サテ，定理ノ証明ハ，大体淡中氏ノ証明ノ容易ナ拡張ニスギマセン。タゞ先ヅ，淡中氏ハ K/K_1 が Zyklisch ナル如キ中間体 K_1 ヲトッテ居ラレマスが，K_1/k が Zyklisch ナ如キ K_1 ヲトッテモ大体似タヤウニシテ証明サレルコトニ注目シマス。(ソシテカウシマスト，例ノのるむ類群ト因子團ノ関係ハ Zyklisch ニカギラナイ一般ノ場合ヲ使ハネバナラナイ代リニ，Chevalley ノ定理ハ使ハナイデ済ミマスカラ幾分

簡単デアルトモイヘマセウ。

シカシ，のるむ類群ト因子團ノ關係ノ定理ノ證明ニ Chevalley ノ定理ヲ使フノデスカラ勿論結局同ジコトデセウガ．ソノヤウニ考ヘテ，ソシテソレヲ上ノ如ク一般ガロア拡大ノ場合ニマデ拡張シマス。

証明ハ，先ヅ K/k ヨリ低イ次数ノ拡大ニ対シハ我々ノ主張ガ成立ツト假定シマス。而シテ $\mathfrak{G}$ ハ可解デアルカラ，$K \supset Z \supset k$ ナル巡回拡大 Z/k ヲトル。Z ニ對應スル不変部分群ヲ $\mathfrak{H}$，ソシテ

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\sigma + \mathfrak{H}\sigma^2 + \cdots\cdots + \mathfrak{H}\sigma^{m-1}$$

トスル。

サテ $N_{K/k}(A) = 1$ トスル。シカラバ $N_{K/Z}(A)$ ノ $N_{Z/k}$ ハ 1 ダカラ

(1) $N_{K/Z}(A) = z^{1-\sigma} \qquad (z \in Z)$

トナル。然ルニ $(a)_{\mathfrak{H}}$ ハ K/Z ニ於ケル多元体ニ對應スル因子團ダカラ，因子團トのるむ類群トノ關係ノ定理（秋月，中山 Annalen 112）ヨリ適當ナ $\mu \in \mathfrak{H}$ ($\bmod\ \mathfrak{H}'$ デキマルノ) ヲトレバ

$$z \equiv a_{\mu,\mathfrak{H}} \mod N^{*}_{K/Z}$$

即チ

(2) $z = a_{\mu,\mathfrak{H}}\, N_{K/Z}(C) \qquad c \in K$

デアル．從ッテ

$$(3)\quad \alpha^{1-\varsigma} = a_{\mu,\mathfrak{K}}^{1-\varsigma} \cdot N_{K/k}(c^{1-\varsigma})$$

デアル，然ルニ

$$a_{\mu,\mathfrak{K}}^{1-\varsigma} = a_{\mu,\mathfrak{K}} / a_{\mu,\mathfrak{K}}^{\varsigma} = \prod_{\nu\in\mathfrak{K}} (a_{\mu,\nu}/a_{\mu,\nu}^{\varsigma})$$

$$= \prod_{\nu\in\mathfrak{K}} (a_{\mu,\nu}/a_{\mu,\nu\varsigma}\, a_{\nu,\varsigma}\, a_{\mu\nu,\varsigma}^{-1}) = a_{\mu,\mathfrak{K}}/a_{\mu,\mathfrak{K}\varsigma}$$

$$= \prod_{\nu\in\mathfrak{K}} (a_{\varsigma\mu,\nu}\, a_{\varsigma,\mu}^{\nu}\, a_{\varsigma,\mu\nu}^{-1} / a_{\mu\varsigma,\nu}\, a_{\mu,\varsigma}^{\nu}\, a_{\varsigma,\nu}^{-1})$$

$$= a_{\varsigma\mu,\mathfrak{K}}\, a_{\varsigma,\mu}^{\mathfrak{K}}\, a_{\varsigma,\mathfrak{K}}^{-1} / a_{\mu\varsigma,\mathfrak{K}}\, a_{\mu,\varsigma}^{\mathfrak{K}}\, a_{\varsigma,\mathfrak{K}}^{-1}$$

$$= N_{K/k}(a_{\varsigma,\mu}/a_{\mu,\varsigma}) \cdot a_{\varsigma\mu,\mathfrak{K}}/a_{\mu\varsigma,\mathfrak{K}}$$

デアル -------------- (4)

サテ (a) ニ同伴ナアル因子團 (b) ヲ考ヘル．

$$b_{\sigma,\tau} = a_{\sigma,\tau} \cdot l_{\sigma}^{\tau}\, l_{\tau} / l_{\sigma\tau}$$

コレニ (4) ノ右辺ノ第二項ニ相當スルモノハ

$$b_{\varsigma\mu,\mathfrak{K}}/b_{\mu\varsigma,\mathfrak{K}} = (a_{\varsigma\mu,\mathfrak{K}}\, l_{\varsigma\mu}^{\mathfrak{K}}\, l_{\mathfrak{K}}/l_{\varsigma\mathfrak{K}})$$

$$\div (a_{\mu\varsigma,\mathfrak{K}}\, l_{\mu\varsigma}^{\mathfrak{K}}\, l_{\mathfrak{K}}/l_{\varsigma\mathfrak{K}})$$

$$= (a_{\varsigma\mu,\mathfrak{K}}/a_{\mu\varsigma,\mathfrak{K}}) \cdot N_{K/k}(l_{\varsigma\mu}/l_{\mu\varsigma})$$

デアル．今二ツノ場合ヲ考ヘル．

(i) $\varsigma\mu = \mu\varsigma$ ノ場合。 コノ場合ハモトモト (4) ノ右辺ノ第二因子ハ 1 ダカラ，$(a_{\sigma,\tau})$ ヲソノマヽ $(b_{\sigma,\tau})$ トシテ

$$(5) \quad b_{\mu,\varkappa}^{1-\varsigma} = N_{K/k}(b_{\varsigma,\mu}/b_{\mu,\varsigma})$$

ガ成立ッテヰル。

(ii) $\varsigma\mu \neq \mu\varsigma$ ノ場合。 (4), (3), (1) ニヨリ

$$a_{\varsigma\mu,\varkappa}/a_{\mu\varsigma,\varkappa} = N_{K/k}(A\cdot c^{\varsigma-1}\cdot(a_{\varsigma,\mu}/a_{\mu,\varsigma})^{-1})$$

即チ，トモカク $a_{\varsigma\mu,\varkappa}/a_{\mu\varsigma,\varkappa} = N_{K/k}(f)$ $(f\in K)$ デアルカラ $l_{\varsigma\mu}/l_{\mu\varsigma} = f^{-1}$ トナルヤウナ (l_σ) ヲトレバ（ソレハ勿論可能），ソノ場合ノ $b_{\varsigma\mu,\varkappa}/b_{\mu\varsigma,\varkappa}$ ハ 1 トナリ，ヤハリ (5) ガ成リ立ツ。又ナハチイヅレニシテモ $(a)\sim(b)$ ナル $b_{\sigma,\tau}$ デ (5) ナルモノガアル。シカシテ上記の自む類群トノ對應ハ同伴ナモノニウツッテモ変ラナイカラ

$$(6) \quad z = b_{\mu,\varkappa}\, N_{K/k}(\alpha), \qquad \alpha\in K$$

デアル。ヨッテ (5) ト併セテ

$$(7) \quad N_{K/k}(A) = z^{1-\varsigma} = b_{\mu,\varkappa}^{1-\varsigma}\cdot N_{K/k}(\alpha^{1-\varsigma})$$
$$= N_{K/k}(b_{\varsigma,\mu}/b_{\mu,\varsigma}\cdot\alpha^{1-\varsigma})$$

デアル。

ヨッテ K/k ニ対シテ我々ノ主張ガ成立ツトイフ帰

納法ノ假定ニヨリ $A\cdot(b_{\varsigma,\mu}/b_{\mu,\varsigma}\cdot d^{1-\varsigma})^{-1}$ ハ $b^{1-\lambda}$ ($\lambda\in\mathfrak{K}$) ノ如キ形ノ元イクツカ、$b'_{\kappa,\lambda}/b'_{\lambda,\kappa}$ (但シ $(b'_{\kappa,\lambda})\sim(a)_{\mathfrak{K}}$, $b'_{\kappa\lambda,\mathfrak{K}}/b'_{\lambda\kappa,\mathfrak{K}}=1$) ナル如キ形ノ元イクツカノ積トナル。シカシコヽニ $(b'_{\kappa,\lambda})$ ハ勿論 $(a_{\sigma,\tau})$ 全体ト同伴ナ K/k ノアル因子團 $(b'_{\sigma,\tau})$ ノ $\mathfrak{K}$ ノ部分トナルハ明カ。シカシテソノ際上ノ $N_{K/\mathfrak{K}}(b'_{\kappa,\lambda}/b'_{\lambda,\kappa})=1$ ト同値ナ條件カラ勿論 $N_{K/k}$(〃)$=1$ トナリ、即チ $b'_{\kappa\lambda,\mathfrak{g}}/b'_{\lambda\kappa,\mathfrak{g}}=1$ デアル。従ッテ全部ノ $N_{K/k}$ ヲトレバ $N_{K/k}(b_{\varsigma,\mu}/b_{\mu,\varsigma})=1$ モワカル。

ヨッテ A 自身ガ我々ノ欲シテヰタヤウナ形ニナル。カクテ定理ガ帰納法デ証明サレル。

以上、前述ノ如クイサヽカ邪道ナ拡張デアリマスガ ソシテ容易ナ拡張ニスギマセンガ、思ヒツキマシタマヽヲ御報告イタシマス。考ヘ違ヒモアルカモ知レマセン。御叱正ヲ乞ヒマス。
