1089. 核心群列ノ一擴張ニツイテ

岩澤　健吉（東大）

1. 任意ノ群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキ $\mathfrak{G}$ ノ核心（Zentrum）ヲ $\mathfrak{Z}_1$ ノ剰餘群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ ノ核心ヲ $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$，剰餘群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_2$ ノ核心ヲ $\mathfrak{Z}_3/\mathfrak{Z}_2$，------ トスルトキ

$$(1) \quad 1=\mathfrak{Z}_0 \subseteq \mathfrak{Z}_1 \subseteq \mathfrak{Z}_2 \subseteq \mathfrak{Z}_3 \subseteq \cdots\cdots$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ部分群列ヲ昇核心群列（aufsteigende Zentralreihe）ト呼ビ、又 $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}_1$，$(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_1)=\mathfrak{Z}_2$，$(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_2)=\mathfrak{Z}_3$，------ トスルトキ

$$(2) \quad \mathfrak{G}=\mathfrak{Z}_1 \supseteq \mathfrak{Z}_2 \supseteq \mathfrak{Z}_3 \supseteq \cdots\cdots$$

ナル部分群列ヲ降核心群列（absteigende Zentralreihe）ト呼ブコトハヨク知ラレテ居マス。但シコヽニ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_i)$ ハ

$\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{Z}_i$ トノ交換子群, 即チ $g \in \mathfrak{G}$, $z_i \in \mathfrak{Z}_i$ ナルトキ $(g, z_i) = g z_i g^{-1} z_i^{-1}$ ノ全体カラ生成サレタ $\mathfrak{G}$ ノ部分群デアリマス。[1]

又(1)ナル列ガ有限回デ切レテ $\mathfrak{G}$ 自身ニ達スルコト、(2)ナル列ガ有限回デ切レテ単位群ニ達スルコトハ等値デアッテ而モコノトキ(1),(2)ナル系列ノ $\mathfrak{G}$ カラ 1 ニ到ル長サガ一致シマス。コレガ即チ $\mathfrak{G}$ ガ零巾(nilpotent)ト呼バレル場合デアリマス。[2]

以下ニ於テハ上ノ如キ性質ガ失ハレナイヤウニ核心群列ノ概念ヲ拡張シ、ソノ二三ノ例ト應用トヲ述ベテ見マス。

2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ部分群トシ $\mathfrak{C}$ ハ $\mathfrak{B}$ ノ不変部分群, 且 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ要素デ不変トシマス。即チ凡テノ $a \in \mathfrak{A}$ ニ対シ

$$a\mathfrak{B}a^{-1} = \mathfrak{B}, \quad a\mathfrak{C}a^{-1} = \mathfrak{C}$$

ヨッテ a デ transform スルコトニヨリ $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ニハ一定ノ自己同型ガ與ヘラレマスガ, ソノヤウナ変換デ a ガ $\mathfrak{A}$ ノ凡テノ要素ヲ動クトキ常ニ fix サレルヤウナ $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ノ要素全体ハ明カニ $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ノ部分群ヲツクリマスガ, コノ部分群ニ含マレル最大ノ $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ ノ不変部分群ヲ $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{C}$

---

(1) H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I, (1937) S. 118. 参照.

(2) 註(1)ニ於ケル S. 105 参照.

トシマス。即チ $\mathfrak{H}^*$ ハ次ノ性質ヲ有スル $\mathfrak{H}$ ノ部分群デ又ソレニヨッテ特徴付ケラレマス。

(i) $\mathfrak{H}^*$ ハ $\mathfrak{H}$ ノ不変部分群デアル。

(ii) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}^*) \subseteq \mathfrak{C}$。

(iii) $\mathfrak{H}$ ノ不変部分群 $\mathfrak{D}$ ガ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{C}$ デアルナラバ $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H}^*$.

コノ $\mathfrak{H}^*$ モ亦 $\mathfrak{A}$ ニヨリ不変トナリマス。コノ $\mathfrak{H}^*$ ヲ

$$\mathfrak{H}^* = (\mathfrak{A}; \mathfrak{H}, \mathfrak{C})$$

ト書クコトニシマス。

次ニ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$ ヲ矢張リ $\mathfrak{G}$ ノ部分群トシ $\mathfrak{H}$ ハ又 $\mathfrak{A}$ ニヨリ不変トシマス。

即チ $a \in \mathfrak{A}$ ニ對シ $a\mathfrak{H}a^{-1} = \mathfrak{H}$. コノトキ明カニ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ ハ $\mathfrak{H}$ ノ部分群トナリマスガ一般ニハ不変部分群デハアリマセン. ヨッテ $\mathfrak{H}$ ニ於テ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ カラ生成サレタ<u>$\mathfrak{H}$ ノ不変部分群</u>ヲ

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}]$$

ト書クコトニシマス. 即チ $[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}]$ ハ $\mathfrak{H}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニヨリ不変ナルトキニ限リ意味ヲ有シ且ツソレハ $\mathfrak{H}$ ノ不変部分群デアリマス. 特ニ例ヘバ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$ ガイヅレモ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デアルヤウナ場合ハ $[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}]$ ハ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ ト一致シマス。

サテ $\mathfrak{H}_\gamma$, $\mathfrak{X}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ部分群トシ且ツ $\mathfrak{H}_\gamma$ ガ $\mathfrak{X}$ ノ各要素ニヨリ不変ナルトキ<u>$\mathfrak{H}_\gamma$ ノ $\mathfrak{X}$-核心群列</u>ヲ次ノヤウニ

定義シマス。

定義. $\mathfrak{z}_0=1,\ \mathfrak{z}_1=(\mathfrak{K};\mathfrak{G},\mathfrak{z}_0),\ \mathfrak{z}_2=(\mathfrak{K};\mathfrak{G},\mathfrak{z}_1),$ ······トスルトキ

(3) $\mathfrak{z}_0=1\subseteq\mathfrak{z}_1\subseteq\mathfrak{z}_2\subseteq\cdots\cdots$

ヲ $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{K}$-昇核心群列ト呼ビ $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{G},\ \mathfrak{g}_2=[\mathfrak{K},\mathfrak{g}_1],\ \mathfrak{g}_3=[\mathfrak{K},\mathfrak{g}_2],$ ······トスルトキ

(4) $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{G}\supseteq\mathfrak{g}_2\supseteq\mathfrak{g}_3\supseteq\cdots\cdots$

ヲ $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{K}$-降核心群列ト呼ブ。

又系列

(5) $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\supseteq\mathfrak{G}_2\supseteq\mathfrak{G}_3\supseteq\cdots\cdots$

ガ $[\mathfrak{K},\mathfrak{G}_i]\subseteq\mathfrak{G}_{i+1}\ (i=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ満足スル時之ヲ $\mathfrak{K}$-核心群列ト呼ブ。

$\mathfrak{z}_i,\ \mathfrak{g}_j$ ハ何レモ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デ且ツ $\mathfrak{K}$ ニヨリ不変デスカラ定義ガツヾケラレルノデアリマス。ソコデ次ノ定理ガ成立シマス。

定理1. $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{K}$-昇核心群列 (3) ガ有限回ノ後 $\mathfrak{G}$ ニ達スルコト $\mathfrak{K}$-降核心群列 (4) ガ有限回ノ後単位群 1 ニ達スルコトヽハ等値デアッテ而モコノトキ両系列ノ長サハ相等シクナル. コノトキ $\mathfrak{G}$ ヲ $\mathfrak{K}$-零巾($\mathfrak{K}$-nilpotent)ト呼ブ。

コヽニ (3) 又ハ (4) ノ長サトハ $\mathfrak{z}_{c-1}\neq\mathfrak{G},\ \mathfrak{z}_c=\mathfrak{G}$ ナル c 或ヒハ $\mathfrak{g}_c\neq1,\ \mathfrak{g}_{c+1}=1$ ナル c ヲ云フノデス。証明ハ普

通ノ場合ト全ク同様デスカラ省略シマス。[3]

又 $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ デ不変ナル $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ部分群トスレバ

$$\mathfrak{P}_i(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{P}_i(\mathfrak{H}),$$

特ニ $\mathfrak{N}$ ガ $\mathfrak{H}$ ノ不変部分群ナラバ

$$\mathfrak{P}_i(\mathfrak{H}/\mathfrak{N}) = \mathfrak{P}_i(\mathfrak{H})\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$$

ナルコトモ明カデス。ソノ他 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ 等ニ若干ノ制限ヲオケバ Zassenhaus ノ教科書ニアルヤウナコトハ大抵成立シマス。

3. 特ニ $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ トオケバ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群 $\mathfrak{M}$ ニ對シ上記核心群列ヲツクルコトガ出来マス。今 $\mathfrak{M}$ トシテ $\mathfrak{G}$ ノ一ツノ p-Sylow 群ヲトッテ考ヘルコトニシマス: $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}$. p-Sylow 群ハ凡テ互ニ共軛デスカラ容易ニ知ラルル如ク、ドノ p-Sylow 群ヲトッテモ出来ル。

$\mathfrak{P}$-核心群列ハ同一デアリマス。先ヅ $\mathfrak{P}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デアル場合ヲ考ヘルコトニスレバ、$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{G}$. $\mathfrak{P}_2 = [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1] = [\mathfrak{P}, \mathfrak{G}]$ デアルガ $\mathfrak{P}$ ハ不変部分群デスカラ $\mathfrak{P}_2 \subseteq \mathfrak{P}$, ヨッテ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2) \subseteq (\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ デアリマスガ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群ナル故定義ニヨリ $\mathfrak{P}_3 = [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2] \subseteq (\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$. 同様ニシテ $\mathfrak{P}_4 = [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_3] \subseteq (\mathfrak{P}, (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}))$, ... サテ $\mathfrak{P}$ ハ p-群, 従ッテ普通ノ

(3) 註(1)参照。

意味デ零巾ナル故 $(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}, \cdots\cdots (\mathfrak{P}, \mathfrak{P})) \cdots\cdots)$ ハイツカ1トナル. ヨッテ $\mathfrak{P}_i$ モ遂ニ1トナル. 即チ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{P}$−零巾デアリマス。

次ニ逆ニ $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{P}$−零巾デアルトキ $\mathfrak{P}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デアルコトヲ証明スル。$\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{P}$−階核心群列ノ長サヲ C トシテ C ニ関シテ帰納法ヲ用ヒルコトニシマス。

先ヅ $C=1$ ナラバ $\mathfrak{P}_2=1$。即チ $[\mathfrak{P}, \mathfrak{G}]=1$ デ $\mathfrak{P}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ核心ニ属スル故コレハ明カデス。ヨッテ $C-1$ ノ時成立シタト假定スレバ長サ C ノ場合ニハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_c$ ノ p-Sylow 群 $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}_c/\mathfrak{P}_c$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_c$ ノ不変部分群, 従ッテ $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}_c$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デアリマスガ $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_c]=1$, 即チ $\mathfrak{P}$ ハ $\mathfrak{P}_c$ ノ各要素ト交換可能, 従ッテ $\mathfrak{P}$ ハ $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}_c$ ノ不変部分群, ヨッテ特性部分群ナル故, ソレハ又 $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デアリマス。

ヨッテ $\mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{P}$−零巾ナルコトヲ又 p−零巾ト言フコトニスレバ次ノ定理ガ成立シマス。

定理2. $\mathfrak{G}$ ノ p-Sylow 群 $\mathfrak{P}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群ナルタメニ必要且ツ十分ナル条件ハ $\mathfrak{G}$ ガ p−零巾ナルコトデアル。

$\mathfrak{G}$ 自身普通ノ意味デ零巾ナラバ勿論凡テノ p ニ対シ p−零巾トナル故上ノ定理ニヨリ $\mathfrak{G}$ ノスベテノ Sylow 群ハ不変部分群デ $\mathfrak{G}$ ハソレラノ直積トナリマス。コレハ良ク知

ラレタ結果デアリマス。[4]

4. 次ニ $\mathfrak{G}$ ヲ任意ノ群トシ $\mathfrak{A}$ ヲソノ自己同型群(又ハソノ部分群)トシマス。$\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{A}$ トカラ所謂 Holomorph $\mathfrak{H}$ ヲツクレバ $\mathfrak{G}$ モ $\mathfrak{A}$ モ共ニ $\mathfrak{H}$ ノ部分群デ而モ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{A}$ ニヨリ不変トナリマス。ヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{A}$ー核心群列ヲツクルコトが出来ルワケデス。特ニ $\mathfrak{G}$ が Abel 群デアル場合ハ $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{A}$ー昇核心群列ハ、ハッキリシタ意味ヲ有シマス。即チ $\mathfrak{Z}_0=1$, $\mathfrak{Z}_1$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ要素デ $\mathfrak{A}$ ニ属スル自己同型ニヨリ変ラヌモノヽ全体, $\mathfrak{Z}_2$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ ノ要素デ $\mathfrak{A}$ ニ属スル自己同型デ変ラヌモノヽ全体, ------ デアリマス。

例ヘバ $\mathfrak{G}$ ヲ Abelsche p-gruppe トシ $\mathfrak{A}$ ハ

$$\sigma : x \to x^{1+p}, \quad x \in \mathfrak{G}$$

ナル如キ自己同型 σ カラ生成サレル群トシマス: $\mathfrak{A}=\{\sigma\}$. 然ラバ容易ニ分ルヤウニ $\mathfrak{Z}_1$ ハ $x^p=1$ ナル x ノ全体, $\mathfrak{Z}_2$ ハ $x^{p^2}=1$ ナル x ノ全体, ----- トナリマス。又コノトキハ

$$(\sigma, x) = x^\sigma x^{-1} = x^p$$

ナル故 $\mathfrak{G}_2$ ハ x^p ノ全体, $\mathfrak{G}_3$ ハ x^{p^2} ノ全体, ----- トナリ特ニ $\mathfrak{G}$ が有限群ナラバソレハ $\mathfrak{A}$ー零巾デ定理1ノ意味モコノ時ハ明カデアリマス。

次ニ $\mathfrak{H}$ ヲ任意ノ群, $\mathfrak{R}$ ヲ Einselement ヲ有スル

---

(4) 註1ニ於ケルS. 101参照.

任意ノ可換環トシ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ヲソノ上ノ $\mathfrak{G}$ ノ群環トシマス。$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ヲ左 $\mathfrak{G}$–加群ト考ヘタトキ右カラ $\mathfrak{G}$ ノ要素ヲ掛ケルコトニヨリ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ一ツノ作用素同型が得ラレマス。ヨッテ $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ ト考ヘテ核心群列ヲ考ヘルコトが出来マス。コノトキ $\mathfrak{Z}_2$ ハ容易ニ知ラレル如ク

$$x - x\sigma, \quad x \in \mathfrak{K}(\mathfrak{G}), \quad \sigma \in \mathfrak{G}$$

ナル要素全体カラ生成サレタ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ部分群デソレハ群環ノ要素トシテ

$$y = \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} \alpha_\sigma \sigma$$

トオクトキ

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} \alpha_\sigma = 0$$

トナル如キ y ノ全体デ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ両側-Ideal $\mathfrak{N}$ ヲツクリマス。

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{N}$$

然ルトキ又 $\mathfrak{Z}_3$ ハ

$$x - x\sigma, \quad x \in \mathfrak{N}', \quad \sigma \in \mathfrak{G}$$

ノ全体デ容易ニ知ラレルヤウニ $\mathfrak{N}^2$ ト一致シマス。以下同様ニシテ $\mathfrak{Z}_4 = \mathfrak{N}^3$......, 即チ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ $\mathfrak{G}$–降核心群列ハ

(6) $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}), \ \mathfrak{N}, \ \mathfrak{N}^2, \ \mathfrak{N}^3, \ ......$

トナリマス。

特ニ $\mathfrak{G}$ が p–群デ $\mathfrak{K}$ が標数 p ナル有限体デアレ

バ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ト $\mathfrak{G}$ トノ Homomorph モ亦 p-群デ，從ツテ零巾ナル故 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ $\mathfrak{G}$-零巾，ヨッテ (6) トル系列ハイツカ單位群トナル；$\mathfrak{N}^c=1$. コレカラ直チニ次ノ定理ガ得ラレマス。

定理 3. $\mathfrak{G}$ ヲ p-群，$\mathfrak{K}$ ヲ標數 p ナル有限体トシ，又群環 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ニ於テ係數ノ和ガ 0 トナル如キ要素全体カラナル両側-Ideal ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ根基 (Radikal) デアル。(5)

---

(5) S. A. Jennings, The structure of the group ring of a p-group over a modular field, Trans. Amer. Soc. 50, 1941, p. 175–185 參照。