1087. 無限分解可能ナル分布法則ノ集合ガ正規族ヲナス爲ノ條件

伊藤　清（統計局）

§1. $\mathfrak{G}$ヲ實數空間ノ上ノ確率分布法則（以後之ヲ單ニ分布法則ト呼ブ）ノ集合トスル。

$\mathfrak{G}$ガ正規族ヲナスタメノ條件ニツイテハ次ノP. Lévyノ定理ガアル。

定理　(P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires p. 63)

$\mathfrak{G}$ガ正規族ヲナス爲ノ必要充分條件ハ

$$(1)\quad \lim_{l\to\infty} \sup_{F\in\mathfrak{G}} \int_{|\lambda|\geq l} F(d\lambda) = 0$$

ナルコトデアル。

今$\mathfrak{G}$ガ無限分解可能ナル分布法則ノミノ集合デアル時、$\mathfrak{G}$ガ正規族ヲナスタメノ必要充分條件ヲ別ナ形デ求メテ見タイ。

先ヅ無限分解可能ナル確率法則LハP. Lévyノ定理ニヨレバ、次ノ標準形デ表ハサレル。即チ$\varphi_L(z)$ヲLノ特性函數トスレバ

$$(2)\quad \varphi_L(z) = \exp\left\{imz - \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\right\}$$

$$\left(\text{但シ} \ \oint_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty}\right)$$

茲ニ

(3) m ハ實數

(4) $\sigma \geqq 0$

(5) n ハ實數空間ノ上ノ（必ズシモ有界ナラザル）測度デ

$$(5.A) \quad \int_{|u| \geqq 1} n(du) < \infty$$

$$(5.B) \quad \int_{|u| \leqq 1} u^2 n(du) < \infty$$

而モ上ノ (4) — (5.B) ヲ滿ス (m, σ, n) ト無限分解可能ナル分布法測 L トノ間ニハ一對一ノ關係ガアル。コノ m, σ, n ヲ L ノ三要素ト呼ビ、m_L, σ_L, n_L ニテ表ハスコトニスル。

ソコデ $\mathfrak{S}$ ヲ無限分解可能ナル分布法則ノ集合トスルトキ，$\mathfrak{S}$ ガ正規族ヲナスタメノ條件デ、コノ法則ノ三要素ニ關スル條件ニテ表ハスコトガ本稿ノ目的デアル。結論ヲ先ニイフト

定理. 無限分解可能ナル分布法則ノ集合 $\mathfrak{S}$ ガ正規族ヲナス爲ノ必要充分條件ハ

$$(6) \quad \sup_{L \in \mathfrak{S}} |m_L| < \infty$$

(7) $\sup_{L \in \mathfrak{G}} |\sigma_L| < \infty$

(8.A) $\sup_{L \in \mathfrak{G}} \int_{|u| \geqq a} n_L(du) < \infty \quad \text{for } a > 0$

(8.B) $\lim_{a \to \infty} \sup_{L \in \mathfrak{G}} \int_{|u| \geqq a} n_L(du) = 0$

(9) $\sup_{L \in \mathfrak{G}} \int_{|u| \leqq 1} u^2 n_L(du) < \infty$

ガ同時ニ成立スルコトデアル。

§2、先ヅ最初ニ $\mathfrak{G}$ ガ正規族ヲナストイフ假定カラ(8.B)ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。

若シモ(8.B)ガ成立シナイデ、コノ極限値（ソノ存在ハ明ラカ）ガ正數 η ナリトセヨ。

而ラバ任意ノ整數 k ニ對シテ $L_k \in \mathfrak{G}$ ガ存在シテ, L_k ノ三要素 m_k, σ_k, n_k ハ

$$\int_{|u| \geqq k} n_k(du) > \frac{2\eta}{3}$$

即チ $$\int_k^{\infty} n_k(du) > \frac{\eta}{3} \quad \text{又ハ} \quad \int_{-\infty}^{-k} n_k(du) > \frac{\eta}{3}$$

ノ何レガ無限ニ多クノ k ニ對シテ成立スル。何レデモ同様デアルカラ前者ノ場合ヲ考ヘル。即チ $\{k\}$ ノ部分列 $\{k_p\}$ ニ對シテ

$$\int_{k_p}^{\infty} n_{k_p}(du) > \frac{\eta}{3} \qquad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

故ニ勿論（$k_p \geqq p$ ナル故）

$$\int_{p}^{\infty} n_{k_p}(du) > \frac{\eta}{3}$$

L_{k_p} ヲ簡單ノタメ L_p ニテ書キナホシ，ソノ三要素ヲ再ビ m_p, σ_p, n_p ニテ表ハセバ

$$\int_{p}^{\infty} n_p(du) > \frac{\eta}{3}$$

$$\alpha = \min\left(\frac{\eta}{3},\ \log_e 2\right) \text{トスレバ勿論}$$

$$(1) \quad \int_{p}^{\infty} n_p(du) > \alpha > 0 \qquad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

今準備トシテ *Lemma* ヲ証明スル。

Lemma 1. L, L' ガ無限分解可能ナル分布法則ナルトキ

$$\sigma_L \leqq \sigma_{L'} \qquad n_L \leqq n_{L'}$$

ナラバ

$$Q(L, l) \geqq Q(L', l)$$

証明. 次ノ函数 $\varphi(z)$ ハアル無限分解可能ナル分布法則 L^* ノ特性函数ナリ。

$$\log \varphi(z) = i(m_{L'} - m_L)z - \frac{\sigma_{L'}^2 - \sigma_L^2}{2} z^2$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\left(n_{L'}(du)-n_L(du)\right)$$

而モ $\varphi_{L'}(z)=\varphi_L(z)\,\varphi_{L''}(z)$, 故ニ $L'=L*L''$

故ニ P. Lévy ノ定理ニヨリ（前掲書 p. 90）

$$Q(L',l)\leqq Q(L,l)$$ （Lemma ノ証明終）

備テ

$$(2)\quad \exp\left\{\int_p^{\infty}(e^{izu}-1)\,n_p(du)\right\}$$ ニ對應スル分布法

則ヲ G_p トシ

$$(3)\quad \exp\left\{\frac{\alpha}{\int_p^{\infty}n_p(du)}\int_p^{\infty}(e^{izu}-1)\,n_p(du)\right\}$$ ニ對

應スル分布法則ヲ H_p トス. 而ラバ上ノ Lemma 1 ニヨ

リ（尚 (1) 式ニ注意シテ）

$$(4)\quad Q(L_p,l)\leqq Q(G_p,l)\leqq Q(H_p,l)$$

$$H_p(\{0\})=e^{-\alpha},\quad H_p((-\infty,0))=0,$$

$$H_p((0,p))=0,$$

$$H_p((H_p,\infty))=1-e^{-\alpha}$$

[illegible] ナラバ

$$[illegible]\ l)\leqq \max(e^{-\alpha},1-e^{-\alpha})\leqq e^{-\alpha}$$

（$\alpha\leqq\log_e 2$ ニ注意シテ!!）

$$\int_{|\lambda|\geqq l} L_p(d\lambda) = 1 - \int_{-l+0}^{l-0} L_p(d\lambda) \geqq 1 - Q(L_p, 2l)$$

$$\geqq 1 - e^{-\alpha} > 0$$

故ニ前掲ノ P. Lévy ノ定理ニヨリ $\{L_p\}$ ハ正規族ヲナサナイ。故ニ $\mathfrak{G}$ モ亦正規族デナイコトニナリ，假定ニ反スル。故ニ §1 (8.B) ガ成立スルヲ要スル。

§3. 次ニ更ニ進ンデ §1 (8.A) ヲ証明スル。今 (8.A) ガ成立シナイデ、アル $a(>0)$ ニ対シテ

$$\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_a^\infty n_L(du) = \infty$$

トセヨ。$b > a$ トスレバ

$$\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_a^b n_L(du) + \sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_b^\infty n_L(du) \geqq \sup \int_a^\infty n_L(du)$$

$$= \infty$$

§2 ニ証明シタ所ニヨレバ充分大キイ b ニ對シテハ上ノ第二項ハ 1 ヨリ小サイ。故ニカヽル b ニ對シテハ

$$\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_a^b n_L(du) = \infty$$

前ト同様ニ $L_1, L_2, \cdots\cdots \in \mathfrak{G}$ ヲ適當ニ選出シテ（n_k ヲ上ト同様ニ定義シテ）

$$(1) \qquad \int_a^b n_k(du) > k$$

ナラシメ得ルト假定シテヨイ。今

(2) $\exp\left\{\int_a^b (e^{izu}-1)\, n_k(du)\right\}$ ニ對應スル分布法則ヲ G_k トスルナラバ、Lemma 1 ニヨリ

(3) $Q(L_k, l) \leqq Q(G_k, l)$

併テ G_k ノ平均値ハ $M_k = \int_a^b u\, n_k(du)$, 標準偏差ハ

$D_k = \sqrt{\int_a^b u^2 n_k(du)} \geqq a\sqrt{k} \to \infty$ 特性函數ノ計算ニヨリ $\dfrac{1}{D_k}(G_k - M_k)$ ハ正規分布ニ近ヅクコトガ分ル。

故ニ

$$\lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2D_k) = \theta = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda < 1$$

D_k ハ k ト共ニ限リナク増大スルカラ

$$\lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2l) \leqq \lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2D_k) = \theta$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} G_k([-l, l]) \leqq \lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2l) \leqq \theta$$

故ニ $\displaystyle \sup_{k=1}^{\infty} \int_{|u|\geqq l} G_k(du) \geqq 1-\theta$

從ツテ前述ノ Lévy ノ定理ニヨリ $\{G_k\}$ ハ正規族デハナイ。從ツテ勿論 $\mathfrak{G}$ ガ正規族デナクナリ，假定ニ反スル。

故ニ §1 (S.A) ガ成立スルヲ要スル。

§4. §3ト全ク同様ノ論法デ§1. (7), (9)ガ証明出来ル。残ル所ハ(6)ノミデアル。

之レヲ証明スル前ニ§1. (7), (8.A), (8.B), (9)ガ成立スルトキ

$$(1)\quad \exp\left\{-\frac{\sigma_L^2}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n_L(du)\right\}$$

ニ對應スル分布法則ヲ L'_L トスレバ、$\{L'_L;\ L\in\mathfrak{S}\}$ ハ正規族ヲナスコトヲ証明シヨウ。

(1)ノ $\exp\{\quad\}$ ノ中ヲ書キ換ヘテ

$$(2)\quad i m'_L z-\frac{\sigma_L^2}{2}z^2+\int_{|u|<1}\left(e^{izu}-1-izu\right)n_L(du)$$

$$+\int_{u\geqq 1}\left(e^{izu}-1\right)n_L(du)+\int_{u\leqq -1}\left(e^{izu}-1\right)n_L(du)$$

茲ニ $\displaystyle m'_L-\int_{|u|<1}\frac{u^3}{1+u^2}n_L(du)-\int_{|u|\geqq 1}\frac{u}{1+u^2}n_L(du)$

而ラバ

$$(3)\quad |m'_L|\leqq\int_{|u|<1}u^2 n_L(du)+\int_{|u|\geqq 1}n_L(du)$$

右辺ハ假定ニヨリ有界。故ニ $|m'_L|<C<\infty$ トスル。

次ニ

$$(4)\quad \exp\left\{-\frac{\sigma_L^2}{2}z^2+\int_{|u|<1}\left(e^{izu}-1-izu\right)n_L(du)\right\}$$

ニ對應スル分布ヲ H_L

(5) $\exp\left\{\int_{u\geqq 1}(e^{izu}-1)\,n_L(du)\right\}$ ニ對應スル分布ヲ G_L

(6) $\exp\left\{\int_{u\leqq -1}(e^{izu}-1)\,n_L(du)\right\}$ ニ對應スル分布ヲ G'_L

トスル。

(7) $L' = m'_L + H_L * G_L * G_L$

先ヅ H_L トル分布ノ平均値ハ 0 デ，ソノ標準偏差ハ

$\sigma_L^2 + \int_{|u|\leqq 1} u^2 n_L(du)$ デアッテ，コレハ L ガ $\mathfrak{G}$ ノ上ヲ動クトキニ一樣ニ有界デアル。ソノ上限ヲ $C'(<\infty)$ トスル。

(8) $\int_{|\lambda|\geqq l} H_L(d\lambda) \leqq \dfrac{C'}{l^2}$

次ニ $\int_{|\lambda|\geqq l} G_L(d\lambda)$，$\int_{|\lambda|\geqq l} G_L(d\lambda)$ ガ共ニ $l\to\infty$ ノトキ $L\,(\in\mathfrak{G})$ ニ關シテ一樣ニ 0 ニ近ヅクコトヲ證明スル。何レデモ同ジコトデアルカラ前者ニツイテ證明ヲスル。

(9) $\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_{u\geqq a} n_L(du) = \varphi(a)$

トスレバ $\varphi(a)$ ハ單調非減少デ $\lim_{a\to\infty}\varphi(a) = 0$ ナルコトハ §1 ノ條件 (8.A)，(8.B) ニヨリ明ラカ。

今[1, ∞]ノ上ノ測度nヲ

$$(10) \quad n([a_1, a_2]) = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) \qquad (1 \leqq a_1 < a_2)$$

ニテ定義シ

$$(11) \quad \exp\left\{\int_{u \geqq 1} (e^{izu} - 1)\, n(du)\right\}$$

ニ對應スル分布法則(ソノ存在ハ $\lim_{a \to \infty} \varphi(a) = 0$ カラ出ル)ヲGトシタトキ

$$(12) \quad \int_{|\lambda| \geqq l} G_L(d\lambda) \leqq \int_{|\lambda| \geqq l} G(d\lambda)$$

ヲ證明スレバ $\int_{|\lambda| \geqq l} G_L(d\lambda)$ ガ $l \to \infty$ ノトキ一樣ニ0ニ近ヅクトイヘル。今 $f_L(a)$ ヲ

$$(13) \quad \int_{u \geqq a} n(du) = \int_{u \geqq f_L(a)} n_L(du)$$

ニヨリ定義スル。先ヅ $a \geqq f_L(a)$ (故ニ $f_L(a) = 1$ ナル a ノ値――コレヲ" b_L "ニテ表ハス――ヨリ小ナル a ニ對シテハ $f_L(a)$ ハ定義サレナイ)ナルコトニ注意シテ置カウ。偖テ

$$(14) \quad \exp\left\{\int_{u \geqq b_L} (e^{izu} - 1)\, n(du)\right\}$$ ニ對スル分布ヲ K_L ／

(15) $\exp\left\{\int_{1\leqq u<b_L}(e^{izu}-1)\,n(du)\right\}$ ニ對應スル分布ヲ K'_L

トスル。而ラバ勿論 $G=K_L*K'_L$。今 K_L, K'_L ニ從ヒ互ニ獨立ナ確率變數ヲ x, y トスレバ，$x+y$ ハ G ニ從フ。而モ $x\geqq 0$, $y\geqq 0$. 故ニ

$$(16)\quad \int_{|\lambda|\geqq l} G(d\lambda)=P(x+y\geqq l)\geqq P(x\geqq l)$$

$$=\int_{|\lambda|\geqq l} K_L(d\lambda)$$

故ニ

$$(17)\quad \int_{|\lambda|\geqq l} K_L(d\lambda)\geqq\int_{|\lambda|\geqq l} G_L(d\lambda)$$

ヲ証明スレバ (12) ガ正シイコトニナル。ソノタメニ homogeneous differential process x_t ヲ定義シ

"1" $x_0=0$

"2" x_1 ハ K_L ニ從フ

"3" x_t ハ階段函數デアル。

ヤウニスル。（コノ可能性ノ証明ハ近刊ノ日本數學輯報ニ筆者ガ書イテオキマシタカラ御参照下サイ）。而ラバ區間 (a, a') $(b_L<a<a')$ ニ入ル高サヲ有スル跳躍ノ數ノ平均ハ $n((a, a'))$ デアル。今 a ナル跳躍ヲ全部 $f_L(a)$ ニ縮小スルトキニ得ラレル process ヲ x'_t トスルト

x_t ハ x_t ト同ジヤウナ process デ唯 "2" ノ代リニ、"y_1 ハ G_L ニ従フ" コトニナル。$0 \leqq y_1 \leqq x_1$ ハ明ラカ故（一般ニ "$0 \leqq y_t \leqq x_t$" モ成立スル）

$$\int_{|\lambda| \geqq l} G_L(d\lambda) = P(y_1 \geqq l) \leqq P(x_1 \geqq l)$$

$$= \int_{|\lambda| \geqq l} K_L(d\lambda)$$

即チ (17) ヲ得タ。

備テ (7) ニヨリ

$$\int_{|\lambda| > c+3l} L'_1(d\lambda) < \frac{c'}{l^2} + \int_{|\lambda| \geqq l} G(d\lambda) + \int_{|\lambda| \geqq l} G'_L(d\lambda)$$

右辺ハ $l \to \infty$ ノトキ $L(\in \mathfrak{G})$ ニ関シテ一様ニ 0 ニ近ヅクカラ、前述ノ P. Lévy ノ定理ニヨリ $\{L'_1;\ L \in \mathfrak{G}\}$ ハ正規族ヲナス。

§5. 備テ $\mathfrak{G}$ が正規族ヲナスナラバ，§2, §3 ニヨリ §1 (7) —— (9) が成立スル。而ラバ §4 ニヨリ $\{L'_1;\ L \in \mathfrak{G}\}$ が正規族ヲナス。故ニ m_L が一様ニ有界デナイトスルト、$\mathfrak{G}$ が正規族ヲナサナイコトニナリ、矛盾ニ陥ル。即チ §1 (6) モ亦成立シナケレバナラナイ。

逆ニ §1. (6) —— (9) が成立スレバ §4 ニヨリ上ノ集合 $\{L_1;\ L \in \mathfrak{G}\}$ が正規族ヲナシ、§1 (6) ニヨリ

$\mathfrak{G}$モ亦正規族ヲナス。　　　　— 以上 —