1086. 正ノ量ト實數トニ関スル一考察

南雲　道夫（阪大）

一次元的量ト実数トノ関係ハ解析學ト幾何學トノ間ニ於ケル基礎問題デアル．之レニ関シテハ，両者ヲ殆ンド同一視スル大雑把ナ立場ト，両者ヲ隔離シテ別々ニ基礎付ケル立場トノ二ツガアリ，両者ノ本質的ナ関係ニ深イ考慮ヲ拂フモノガ割ニ少ナイヤウデアル。高木先生ハ續数學雜談（續輓近高等数學講座）ノ無理数論ニ於テ：

「連續的量論ト切リハナシタ無理數論ハ存在理由ヲ缺クモノデアラウ。連續的量論ヲ確然タル基礎ノ上ニ築キ上ゲテ，ソレヲ無理数論ノ背景ニスベキコト當然デアル。」

ト言ハレテ，先ヅ連續的ノ量ニ関スル公理ヲ基ニシテ，連續性ノ本質ヲ（切断ニヨル）説明サレ，之レカラ倍量，等分ニヨリ有理量（筆者ノ假稱）ヲ導キ，進ンデ無理量ガ切断ニヨリ規定サレルコトヲ説明サレタ。高木先生ノ此ノ講義ハ，連続的量ヨリ実数論ヘノ正面大道ヲ示サレテヰル．所ガ（連續的）量ニハ，本来和ヤ大小ノ比較ガ出来ルガ積ハナイ．

1米×1米＝何米ナドハ無意味デアル．之レニ反シ実数ニハ四則ガ考ヘラレル．茲デハ此ノ本質ヲ問題ニスル．

即チ連續的量ヲ（公理系ニヨリ）與ヘラレタモノトシ，之レニ對スル運算（操作）トシテ実数ヲ定義シテ，四則及ビ大小ニ關スル法則ヲ導出シテ見ルノデアル．連續的量ヨリ實數ヘノ一側面觀トシテ御參考トモナラバ幸甚デアル。

§1. 正ノ量ノ体系 S.

S ナル集合ガ次ノ公理ヲ満タストキ，S ヲ正ノ量ノ体系トイフ。

0. $x, y \in S$ ナルトキ，$x+y \in S$ ガ常ニ一義的ニ定マル。

1. $x+y=y+x$

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$

3. $x+y \neq x$

4. $x \neq y$ ナルトキ，$x+z=y$ ナル z ガ存在スルカ，又ハ $y+z=x$ ナル z ガ存在スル。

(以上)

3ト4トカラ量ノ比較ガ出来ル．即チ

定理1. (イ) $x+z=y$ ナルトキ，$x<y$ ト定義スレバ，任意ノ $x, y \in S$ ニツイテ

$$x=y, \quad x<y, \quad y<x$$

ノイヅレカ一ツガ成立シ，此ノ三者ハ互ニ相容レナイ。

(ロ) $x<y$ 且ツ $y<z$ ナルトキハ，$x<z$.

(ハ) $x<y$ ナルトキ，$x+z<y+z$，逆モ成立スル.」

証明ハ簡単ダカラ略ス.

尚，$x<y$ ナルトキ，$x+z=y$ ナル z ハ存在スルガ，只一ツニカギル. 此ノトキ $z=y-x$ ト書ク事クコトニスル。

S ガ更ラニ次ノ公理ヲ満タストキ，S ヲ連續的ナリトイフ.

5. S ヲ丁度二ツノ部分（共ニ空ナラズ）A, B ニ分チ，$x\in A$，$y\in B$ ナラバ常ニ $x<y$ ナリトスレバ，$x\in A$，$y\in B$ ナルスベテノ x, y ニツキ同時ニ，$x\leqq s$，$y\geqq s$ ナル $s\in S$ ガ丁度一ツ存在スル.〔此ノトキ $s=(A|B)$ ト書ク.〕

連續的ナ S ニツイテハ次ノ定理ガ成立ツ.

定理 2. $x<y$ ナラバ $x<z<y$ ナル z ガ存在ス。又 S ニハ最大ノモノモ最小ノモノモナイ.」

此ノ前半ハ S ノ稠密性デアル.（証明ハ高木先生ノ解説参照）後半ハ，$x<x+x$，及ビ之レカラ $x<y<x+x$ ナル y ガ存在スル. $y-x=z<x$ ニヨツテ明ラカ.

次ニ Archimedes ノ原則. 先ツ

$$\underbrace{x+x+\cdots\cdots+x}_{n\text{イロ}} = n\cdot x$$

ト書クコトニスレバ

定理3. $x, y\in S$ ナルトキ, $nx>y$ ナル自然数ガ存在スル.」

（証明ニハ高木先生雑談参照）

定理4. n ヲ與ヘラレタ自然數, $x\in S$ トスレバ $ny<x$ ナル $y\in S$ ガ存在スル.」（上記雑談,等分可能ノ部分参照）

§2. S ニ對スル操作ノ体系 $\mathbb{Z}$.

S ノ量 x ニ對シ, S ノ量 x' ヲ對應サセル操作 $x'=\lambda(x)$（函數）デ特ニ

(0) $\lambda(x+y)=\lambda(x)+\lambda(y)$

ナル λ ヲ考ヘル. カヽル λ ノ全体ヲ $\mathbb{Z}$ ト名付ケル.

$\lambda(x)=n\cdot x$ （n 自然數）トスレバ, $\lambda\in\mathbb{Z}$ デアル。

定理5. $\lambda\in\mathbb{Z}$, $x<y$ ナラバ, $\lambda(x)<\lambda(y)$. 逆モ成立ス.」

定理6. $\lambda(n\cdot x)=n\cdot\lambda(x)$ （n ハ自然數).」

証明ハイヅレモ容易.

尚 $\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2$ ヲバ次ノ如ク定義スレバ之モ $\mathbb{Z}$ ニ屬スル.（証明略）

$$\lambda_1(x)+\lambda_2(x)=[\lambda_1+\lambda_2](x),$$

$$\lambda_1(\lambda_2(x))=\lambda_1\lambda_2(x).$$

定理7. $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_2+\lambda_1,\ (\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_3=\lambda_1+(\lambda_2+\lambda_3).$

$$\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3.$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3=\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3.$$

$(\lambda_1\lambda_2)\lambda_3=\lambda_1(\lambda_2\lambda_3).$」 （証明容易）

（$\lambda_1\lambda_2=\lambda_2\lambda_1$ナルコトハ後デ証明スル。）

次ニλノ大小比較ニツキ

定理8. 或ル $a\in S$デ $\lambda_1(a)<\lambda_2(a)$ ナラバ，S全体デ $\lambda_1(x)<\lambda_2(x)$.」

(証) 若シモ $b\in S$デ

(1) $\lambda_1(b)\geqq\lambda_2(b)$

ナラバ，矛盾ナルコトヲ示サウ. $\lambda_1(a)<\lambda_2(a)$カラ

(2) $m\{\lambda_2(a)-\lambda_1(a)\}>\lambda_1(b)$

ナル自然数 m ガアル. 従ッテ $m\cdot\lambda_2(a)>\lambda_1(b)$.
故ニ

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} n\lambda_1(b)<m\lambda_2(a) \\ \text{且ツ} \\ (n+1)\lambda_1(b)\geqq m\lambda_2(a)\end{array}\right.$$

ナル自然数 n ガアル. (3) ノ下ノ式ト(2)トカラ，
$(n+1)\lambda_1(b)>\lambda_1(b)+m\lambda_1(a)$. 故ニ $\lambda_1(n\cdot b)$
$>\lambda_1(m\cdot a)$. 故ニ

$$n\cdot b>m\cdot a$$

所ガ (3) ノ上式ト (1) トカラ $n\cdot\lambda_2(b)<m\lambda_2(a)$.

故ニ

$$n \cdot b < m \cdot a$$

之ハ矛盾デアル。(証了)

系. $\lambda_1(a) > \lambda_2(a)$ ナラバ, $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$.」

定理9. 或ル $a \in S$ デ $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ ナラバ S 全体デ $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$」

(証) 定理8カラ容易.

定理10. $\lambda_1\lambda_2(x) = \lambda_2\lambda_1(x)$」

(証) 定理9ヨリ, $\lambda_1\lambda_2(a) = \lambda_2\lambda_1(a)$ ナラバヨシ、n_0 ヲバ, $a < n_0\lambda_1(a)$, $a < n_0\lambda_2(a)$ ナル自然数ニトレバ, $n \geqq n_0$ ナル任意ノ自然数ニ対シ,

$$(4)\quad \begin{cases} m \cdot a \leqq n\lambda_1(a) < (m+1)a \\ m' \cdot a \leqq n\lambda_2(a) < (m'+1)a \end{cases}$$

ナル m, m' ガ決定スル. 定理8,9ニヨリ, a ハ任意ノ元デ置キカヘラレルカラ(両辺同時ニ), 結局

$$mm'a \leqq n^2\lambda_1\lambda_2(a) < (m+1)(m'+1)a,$$

$$mm'a \leqq n^2\lambda_2\lambda_1(a) < (m+1)(m'+1)a$$

ソコデ若シモ $\lambda_1\lambda_2(a) > \lambda_2\lambda_1(a)$ ナラバ, 之カラ

$$(m+1)(m'+1)\cdot a - mm' \cdot a > n^2\lambda_1\lambda_2(a) - n^2\lambda_2\lambda_1(a).$$

従ッテ

$$(m+m'+1)\cdot a > n^2\{\lambda_1\lambda_2(a) - \lambda_2\lambda_1(a)\}$$

所ガ(4)カラ

$$n\cdot\{\lambda_1(a)+\lambda_2(a)+a\}\geqq(m+m'+1)\cdot a.$$

故ニ

$$n\{\lambda_1(a)+\lambda_2(a)+a\}>n^2\{\lambda_1\lambda_2(a)-\lambda_2\lambda_1(a)\}$$

從ッテ

$$\lambda_1(a)+\lambda_2(a)+a>n\cdot\{\lambda_1\lambda_2(a)-\lambda_2\lambda_1(a)\}.$$

左辺ハ n ヲ含マズ, n ハイクラデモ大キクトレルカラ, Archimedes ノ原則ニ反スル. 故ニ $\lambda_1\lambda_2(a)-\lambda_2\lambda_1(a)=0$ デナケレバナラヌ. (証了)

以上ハスベテ S ガ正ノ量デ, λ ハ (0) ナル運算ナルコトト S ガ Archimedes ノ原則ニ從フコトノミニヨッテ証明サレタ.

§3. S ト $\mathbb{Z}$ トノ同型性, ソノ他

前節ノ諸定理ハ S ガ連續性ヨリ弱イ Archimedes ノ原則ニ從フコトノミカラ証明サレタ. 次ニハ $\mathbb{Z}$ ノ各 λ ニハソノ逆ガ存在スルコト, 及ビ加法 (從ッテ大小) ニツイテ S ト $\mathbb{Z}$ トガ同型ナルコトヲ証明スル. 之ニハ連續ノ公理ガ本質的ナ役割ヲ持ツ.

定理11. $\lambda\in\mathbb{Z}$ ニハソノ逆 λ^{-1} ガ存在スル.」

(証) $y\in S$ ナル任意ノ y ヲトル.

$\lambda(x')\leqq y$ ナル x' ノ全体ヲ A, $\lambda(x'')>y$ ナル x'' ノ全体ヲ B トスレバ, $S=A+B$. 且ツ $x'\in A, x''\in B$ ナラバ $x'<x''$. 故ニソノ切断 $z=(A|B)$ ガキマル.

〔但シ A, B ガ空デナイコトハ; $\lambda(a) < n \cdot y$ ナル n ヲトリ, $nx_1 < a$ ナル x_1 ヲトレバ (定理4), $\lambda(n \cdot x_1) < n \cdot y$. 之レカラ $\lambda(x_1) < y$. 故ニ $x_1 \in A$.
又 $n\lambda(a) > y$ ナル n ヲトレバ, $n \cdot a \in B$.〕 $\lambda(z) = y$ デナケレバナラヌ。

若シモ $\lambda(z) < y$ ナラバ, $y - \lambda(z) > \lambda(z')$ ナル z' ガ存在スル. (上ノ A ガ空ナラザル証明ト同様ニシテ).
之レカラ $y > \lambda(z + z')$. 故ニ $z + z' \in A$. $z + z' > z$. ダカラ不合理。

又若シモ $\lambda(z) > y$ ナラバ, $\lambda(z) - y > \lambda(z')$ ナル z' ガ存在スル. 之レヨリ $\lambda(z) > \lambda(z')$ 従ッテ $z > z'$. 故ニ

$\lambda(z) = \lambda(z - z') + \lambda(z')$. ヨッテ $\lambda(z) - y > \lambda(z')$ カラ $\lambda(z - z') > y$. 故ニ $z - z' \in B$. $z - z' < z$. ダカラ不合理.

故ニ $y \in \mathfrak{S}$ ニ對シ, 常ニ $\lambda(z) = y$, $z \in \mathfrak{S}$ ガ存在スル. カヽル z ハ只一ツデアル (定理5ニヨル). ソコデ

$z_i = \lambda^{-1}(y_i)$ トスルトキ, $\lambda(z_1 + z_2) = y_1 + y_2$ ニヨリ, $\lambda^{-1}(y_1 + y_2) = \lambda^{-1}(y_1) + \lambda^{-1}(y_2)$. 故ニ $\lambda^{-1} \in \mathbb{Z}$. (証了)

最後ニ <u>$\mathfrak{S}$ ト $\mathbb{Z}$ トガ(和ニツキ)同型</u>ナルコトヲ示サウ. 之レニハ e ヲ $\mathfrak{S}$ ニ於ケル或ル一定ノ要素トシ, $a \in \mathfrak{S}$ ナル任意ノ a ニ對シ $\lambda(e) = a$ ナル $\lambda \in \mathbb{Z}$ ガ一義

的ニ存在スル事ヲ示セバヨイ事ガワカル．ヨッテ

<u>定理12.</u> e, $a \in \mathfrak{S}$ ナラバ $\lambda(e) = a$ ナル $\lambda \in \mathbb{Z}$ ガ丁度一ツ存在スル.」

(証) 只一ツナルコトハ定理9カラ明カデアル．

$\mathbb{Z}$ ヲバ，次ノ様ニシテ $\mathbb{Z} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$ ニ分ケル．

$\lambda(e) \leqq a$ ナラバ $\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda(e) > a$ ナラバ $\lambda \in \mathbb{V}$.

シカラバ，$\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ナルトキ，常ニ $\lambda(x) < \lambda'(x)$（定理8ニヨル）今 x_1 ヲ一定ニ考ヘレバ，スベテノ $\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ニツキ同時ニ $\lambda(x_1) \leqq y_1 \leqq \lambda'(x_2)$ トナルヤウナ $y_1 (\in \mathfrak{S})$ ガ丁度一ツ存在スルコトヲ示サウ。

即チ $y \geqq \lambda'(x_1)$, $\lambda' \in \mathbb{V}$, トナリ得ル y ノ全体ヲBトシ残リヲAトスレバ，（A, Bハ空デナイ），$y_1 = (A|B)$ ガ定マル．$\lambda' \in \mathbb{V}$ トスレバ，$\lambda'(x_1) \in B$ デアルカラ，$y_1 \leqq \lambda'(x_1)$．又 $\lambda \in \mathbb{U}$ トスレバ，$\lambda(x_1) \leqq y_1$ トナル．（若シ $\lambda(x_1) > y_1$ ナラバ $\lambda(x_1) \in B$. 故ニ $\lambda(x_1) \geqq \lambda'(x_1)$ ナル $\lambda' \in \mathbb{V}$ ガ存在スル．之ハ矛盾）．カクテ上記ノ様ナ y_1 ガ存在スル事ガワカッタ．次ニカヽル y_1 ガ只一ツナル事ヲ示サウ。

若シモカヽル y_1 ガ他ニモアッタトシ，之ヲ $y_1' > y_1$ トスル．

任意ノ $\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ニ対シ，$n \cdot (y_1' - y_1) > \lambda'(x_1) - \lambda(x_1)$ ナル n ヲトレバ，$n^{-1} \cdot \{\lambda'(x) - \lambda(x)\} =$

$\lambda^*(x)$ トスルトキ, $\lambda^* \in \mathbb{Z}$. シカラバ $\lambda(x_1) < \lambda(x_1)+\lambda^*(x_1)$
$< \cdots\cdots < \lambda(x_1)+(i-1)\lambda^*(x_1) < \lambda(x_1)+i\,\lambda^*(x_1)$
$< \cdots\cdots < \lambda'(x_1) \quad (1 \leqq i \leqq n)$. 故ニ

$$\lambda+(i-1)\lambda^* \in \mathbb{U}, \quad \lambda+i\,\lambda^* \in \mathbb{V}$$

ナル i $(1 \leqq i \leqq n)$ ガアル. 故ニ

$$\lambda(x_1)+(i-1)\lambda^*(x_1) \leqq y_1 < y_1' \leqq \lambda(x_1)+i\,\lambda^*(x_1)$$

之カラ $y_1' - y \leqq \lambda^*(x_1)$.

故ニ $n\cdot(y_1' - y_1) \leqq \lambda'(x_1) - \lambda(x_1)$.

之ハ矛盾. 故ニ常ニ $\lambda(x) \leqq y \leqq \lambda'(x)$ ナル y ハ (x ヲキメレバ) 丁度一ツ存在スル. 之ヲ $y=\phi(x)$ トスル.
$\lambda(x_i) \leqq \phi(x_i) \leqq \lambda'(x_i)$ カラ

$$\lambda(x_1+x_2) \leqq \phi(x_1)+\phi(x_2) \leqq \lambda'(x_1+x_2)$$

又 $\lambda(x_1+x_2) \leqq \phi(x_1+x_2) \leqq \lambda'(x_1+x_2)$

$\lambda \in \mathbb{U}$, $\lambda' \in \mathbb{V}$ ハ任意デアルカラ (上述ノ一意性ニヨリ)

$$\phi(x_1+x_2) = \phi(x_1)+\phi(x_2)$$

故ニ $\phi \in \mathbb{Z}$. 尚 $x_1 = e$ ノ時 $y_1 = a$ ナルコトハ明カデアルカラ $\phi(e) = a$. (証了)

定理ニ於ケル e ヲ一定ニスレバ, $\lambda(e)$ ナル値ト λ トハ一對一ニ對應スル. $\lambda(e)=a$ ナルトキ, $\lambda=\lambda_a$ トカケバ, $\lambda_{a+b}(e) = a+b = \lambda_a(e)+\lambda_b(e)$
從ッテ定理9カラ $\lambda_{a+b}(x) = \lambda_a(x)+\lambda_b(x)$. 即チ $\mathbb{Z}$ ト S トハ和ニツイテ同型トナル. 從ッテ大小ノ関

係モ一致スル. 故ニ $\mathbb{Z}$ ハ公理 0, 1, 2, 3, 4, 5 ヲ満タス正ノ量ノ体系ヲナス.

尚, 問題ハ S 及ビ $\mathbb{Z}$ ニ於テ零及ビ負ノ導入デアルガ, コレハ容易ニ形式的ニ出来ル. カクテ $\mathbb{Z}$ ハ連續性ト数体(可換)トノ性質ヲ完備スル. 残ル所ハカヽル S ヤ $\mathbb{Z}$ ガ本質的ニハ(同型性ヲ一致ト見做ストキ)一義的ニ存在スルカトイフコトデアル. ソレニハ $\mathbb{Z}$ ガ無限小数(例ヘバ十進法デ)デ表ハサレルコトヲ示セバヨイ.

終リニ識者ノ御教導ヲ切願シツヽ筆ヲ擱ク.