1081. Fréchet 束ニ就テ (III)

小笠原　藤次郎(廣島大理大)

計量 $\rho(x)$ ノアルベクトル束ガ計量ノ適當ナ変更ニヨリ Fréchet 束ニナル場合、(S), (s) 空間ハノルムノ導入ニヨッテ Banach 空間トナシ得ナイコト他ノ判定法, (s)空間ヲ Bochner 束トシテノ特性ヅケ等ニツイテ簡單ナ二三ノ注意ヲ述ベルノガ目的デアル.

§11. R_4型空間トFréchet束

σ－完全ベクトル束ハ，ソノ各要素 x ニ對シ計量 $\rho(x)$ ガ定義サレ次ノ (1)－(4) ヲ滿足スルトキ R_3 型空間ト呼ベル。(Kantorovitch, Recueil Math. 44(1937), 121－165. 第8節)

(1) $\rho(x)=0$, $x=0$ ノトキニ限リ $\rho(x)=0$

(2) $|x| \leqq |y|$ ノトキ $\rho(x) \leqq \rho(y)$

(3) $x_n \uparrow x$ ノトキ $\rho(x_n) \to \rho(x)$

(4) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$, $\lim\limits_{n} \lim\limits_{p} \rho(x_{n+p}-x_n)=0$ ノトキ $\{x_n\}$ ハ (o)－有界

補題1. R_3 型空間ハ K_σ 型"正則"ベクトル束デアッテ，$x_n \to 0(o)$ ト $\lim\limits_{m,n\to+\infty} \rho(|x_n| \cup |x_{n+1}| \cup \cdots\cdots |x_m|)=0$ トハ同義デアル。

(証) §1デ述ベタ條件 (1°), (2°) (p.1337) ノ成立ト $x_n \to 0(o)$ $\lim\limits_{m,n} \rho(|x_n| \cup \cdots\cdots \cup |x_m|)=0$ トノ同義ヲ云ヘバヨイ。後者ハ Kantorovitch.

前掲149頁定理33ノ証明カラ云ヘル。(1°) ハ彼ノ所論149頁定理34ノ証明法カラ　(2°) ハ §1, 定理1 (p.1338) ノ証明ト同論法ヲ使ヘバヨイ。

補題2. R_3 型空間ガ K_σ 型"正則"ナル條件ハ，常ニ次ノ (5) ヲ滿足スルコトデアル。

(5) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$, $\lim\limits_{\lambda\to0} \lim\limits_{n} \rho(\lambda x_n)=0$ ノトキ $\bigvee x_n$ ガ存在スル。

(証) $\lambda_p \downarrow 0$ ナル任意ノ正数列ニ對シ $\lambda_p x_p \to 0(o)$ ト $\lim\limits_{\lambda\to0} \lim\limits_{n} \rho(\lambda x_n)=0$ ノ同義ヲ云ヘバ充分デアル。(5)

假定ガ成立スルトスル。$\lambda_p \downarrow 0$ ナル正數列ニ對シ, $i_1 < i_2 < \cdots$
……ヲ $\rho(\lambda_{i_n} x_m) < \frac{1}{2^n}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ ガ成立スル樣ニトルト, $\rho(\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \cup \cdots \cup \lambda_{i_{n+p}} x_{i_{n+p+1}}) < \frac{1}{2^n}$ トナルカラ, 前補題ニヨリ $\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \to 0\,(0)$, $\lambda_{i_n} \geqq \lambda_p > \lambda_{i_{n+1}}$ トスレバ, $\lambda_{i_n} x_{i_n} \geqq \lambda_p x_p$ ノタメ $\lambda_p x_p \to 0$ $(p \to +\infty)$
逆ニ, $\lambda_p \downarrow 0$ ナル任意ノ正數列ニ對シ, $\lambda_p x_p \to 0\,(0)$ ガ成立ツトシ, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lim\limits_{n} \rho(\lambda x_n) > \varepsilon > 0$ トスレバ, $n_1 < n_2 < \cdots$
……ヲ $\rho(\lambda_p x_{n_p}) > \varepsilon$ ナルヤウニトルコトガ出來ル。
$n_p \leqq n < n_{p+1}$ ニ對シ $\lambda'_n = \lambda_p$ ト置クト $\lambda'_n \downarrow 0$ 然ルニ $\lambda'_n x_n \to 0(0)$ ハ成立シナイ。故ニ矛盾ガ起ル。

補題3. (1)—(3) ヲ滿足スルベクトル束ガ更ニ次ノ條件 (6) ヲ滿足スルトキハ R_3 型空間デ且"正則"性ノ *improper axiom* ヲ滿足スル。

(6) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots$, $\lim\limits_{n} \rho(x_n) < +\infty$ ノトキ $\bigvee\limits_{n} x_n$ ガ存在スル。

(証) (6) カラ σ-完全ベクトル束ナルコト, 及ビ (5) ノ成立ガ判ル。補題ノ最後ノ部分ハ殆ド自明。

補題4. R_3 型空間ガ ρ ニヨル位相ヲ變更スルコトナシニ, 計量ノ變更ニヨッテ *Fréchet* 束ニナル條件ハ次ノ (7) デアル。

(7) $\rho(x_n) \to 0$ ノトキ $\rho(|x| \cup |x_n|) \to \rho(x)$ トナル。
尚コノトキ *Fréchet* 束ハ K_6^- 型"正則"ニナル。

(証) X ヲ R_3 型空間トシ, ρ ヲ ρ' ニ變更シテ *Fréchet* 束ニナッタトスル。$\rho(x_n) \to 0$ トスレバ $\rho'(x_n) \to 0$ ナル

故ニ $\{x_n\}$ ハ 0 ニ相對一様 (*) ー収斂スル．従ツテ $|x|\smile|x_n|\to|x|$ (*) トナルカラ (7) ガ成立スル。逆ニ (7) ヲ満足スル R_3 型空間ハ計量ノ変更ニヨッテ Fréchet 束ニナル（実ハ K_6^- 型 Fréchet 束）コトハ Kantorovitch，前掲 §8 ニ論ゼラレテヰル。

(7) ヲ満足スル R_3 型空間ヲ R_4 型空間トイフ。R_4 型空間ハ計量ノ変更ニヨリ K_6^- 型"正則" Fréchet 束ニナル．コレガ K_6 型"正則"ニナル條件ハ (5) デアル。

Kantorovitch ハ前掲所論ノ中デ (p.153 定理39)

(8) $\quad kp(x)\le p(2x)\le Hp(x) \qquad 1<k\le H$

ヲ満足スル R_4 型空間ニ於テ，(*)ー有界ト計量 p ニヨル有界トノ同値ヲ述ベテヰル。(8) ヲ満足スル計量ヲモツ R_4 型空間（彼ハ R_5 型空間トイフ）ニ對シ次ノ補題ガ成立スル。

補題5. (8) ヲ満足スル計量 p デモツ R_4 型空間ガ K_6 型"正則"ノトキ，"正則"性ノ improper axiom ヲ満足スル。

(証) (6) ノ成立ヲ証明スレバヨイ。$0\le x_1\le x_2\le\cdots\cdots$ ヲ (o)ー有界デナイトスルト，$\lim_{\lambda\to0}\lim_n p(\lambda x_n)>\varepsilon>0$ ナル ε ガ存在スル。$\lambda=\frac{1}{2^n}$ ニ對シ $p(\frac{1}{2^n}x_p)>\varepsilon$ ナル x_p ガ存在スル。$p(x_p)>k^n\varepsilon$ トナルカラ，$\lim_n p(x_n)=+\infty$ トナル。

(S) 空間 (s) 空間ハ K_6 型"正則"デアルガ，"正則"性 improper axiom ヲ満足シナイ。(0, 1) 上ノ，絶対値ノ $\frac{1}{2}$ 乗ガ可積分ナ函数 $x(t)$ ハ $p(x)=\left[\int_0^1|x(t)|^{\frac{1}{2}}dt\right]^2$ ト置

ノトキ $\rho(2x)=2\rho(x)$ トナル。コノ R_4 型空間ハ，"正則"性ノ *improper axiom* ヲ満足スルガ，ノルムヲ導入シテBanach空間トハナシ得ナイ例デアル。彼ニヨッテ示サレタモウ一 L_T 空間（p.156参照）モ R_4 型空間デアル。L_T 空間トハ，$T(u)$ ヲ $u\geqq 0$ ニ対シテ定義サレタ実函数デ

1. $T(u)\geqq 0$，$u=0$ ノトキニ限リ $T(0)=0$.
2. $T(u)$ ハ連続ナ増加函数，($u_1<u_2$ ノトキ $T(u_1)<T(u_2)$)
3. $T(2u)\leqq KT(u)$.

ヲ満足スルトスル。抽象集合 A ノ部分集合ノ Borel 族上ニ定義サレタ完全加法的測度函数 $m(E)$ ($m(A)<+\infty$) ニ関シ可測函数（殆ド到ル所有限値ヲトルノ）ノ中 $\int_A T(|\varphi(t)|)dm<+\infty$ ナル $\varphi(t)$ 全体ノ作ルベクトル束ニ於テ，$\rho_T(\varphi)=\int_A T(|\varphi(t)|)dm$ トシタモノデアル。$T(+\infty)=\lim_{u\to+\infty}T(u)$ ガ有限ノトキハ，L_T ハ A 上ノ (S) 空間ト同義ニナルカラ K_6 型"正則"デアルガ，"正則"性ノ *improper axiom* ヲ満足シナイ。$T(+\infty)=+\infty$ ノトキハ L_T ハ"正則"性ノ *improper axiom* ヲ満足スル。何レニシテモ ρ_T ノツケカヘデ K_6 型"正則" Fréchet 束ニナル。

以上ハ Kantorovitch，前掲，§8，§10 ノ所論ヲ形ヲカヘテ述ベタニ過ギナイ。

§12. L_T 空間概念ノ拡張

X ヲ単位 e ヲモツ K_6^- 型"正則" Fréchet 束トシ，ソノ

計量函数ヲ $\rho(x)$ トスル。e ヲ恒等的 $=1$ ニスル様ニ X ヲ表現ブール空間 Ω 上ノ連続函数族デ表現スル。Ω 上ノ非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連続函数 $\varphi(\mathfrak{z})$ ニ対シ，§11 デ述ベタ $T(u)$ ニ對シ $T(|\varphi(\mathfrak{z})|)$ ガ X ノアル要素ノ表現函數ニナルトキ，コノ要素ヲ $T(|\varphi|)$ デ表ハス。$T(|\varphi|)\in X$ ナル φ ノ全体ヲ X_T トスレバ

補題1. X_T ハ完全ベクトル束ニシテ §11・1 (1), (2), (3), (7) ヲ満足スル。

(証) $T(|\varphi_1(\mathfrak{z})|\cup|\varphi_2(\mathfrak{z})|)\leqq T(|\varphi_1(\mathfrak{z})|)\cup T(|\varphi_2(\mathfrak{z})|)$, $T(|\alpha\varphi(\mathfrak{z})|)\leqq KT(|\varphi(\mathfrak{z})|)$ カラ X_T ハ完全ベクトル束ヲ作リ $\rho_T(\varphi)=\rho(T(|\varphi|))$ ト定メルトキ $\rho_T(|\varphi|\cup|\varphi'|)\leqq\rho_T(\varphi)+\rho_T(\varphi')$ コレカラ (1), (2), (3), (7) ノ成立ガ直チニ判ル。

(4) ノ成立ノ充分條件ハ色々ノ形デ與ヘラレルガ，コレダケヲ論ズルコトハ *trivial* ナ議論ニナルカラ省略スル。X ガ *Kantorovitch* 空間，*Bochner* 束或ハ之レヲ一般ニシタ條件 (N) ヲ滿足スルベクトル束デハ $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\cdots\cdots$ $\{x_n\}$ ガ有界デナイトキ $\|x_n\|_p\longrightarrow+\infty$ ナル $\|x\|_p$ ガアルカラ，コノトキ X_T ハ K_6 型"正則"ベクトル束デ，(4), (5) ハ常ニ滿足サレル。*Kantorovitch* ガ論ジタノハ X ガ L 空間ノトキデアル。

13. (δ) 空間ノ特性ヅケ

ベクトル束ニ對シ，次ノ條件 (#) ヲ設ケル。

(#) $x_i\frown x_j=0$, $(i\neq j)$ ナル $\{x_i\}$ ハ共ニ $\bigvee x_i$ ヲ含

ム。

補題1. 単位eヲモツσ-完全ベクトル束ヲeヲ恒等的1トラシメルヤウ，主イデヤルニヨル方法デ，ソノ表現ブール空間上ノ連續函数族デ表現スルトキ，コノ連續函數族ガ非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトルスベテノ連續函数カラナルタメノ條件ハ條件(♯)デアル。從テコノトキベクトル束ハeヲ環單位トスル環束ヲ作ル。

(證) 殆ド自明。

(注意) 完全ベクトル束ニ於テ，(♯)ノ代リニ，$x_\alpha \frown x_\beta = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ナル$\{x_\alpha\}$ト共ニ$\bigvee x_\alpha$ヲ含ムトイフ條件ハ完全ベクトル束ガ単位eヲモチ，eヲ恒等的1ナルヤウニ表現スルトキ，表現函数ガスベテノ，非稠密集合ヲ除イテ有限値ヲトル連續函数カラナルトイフ條件ト同義デアル。

補題2. 完全(或ハσ-完全) Banach束ガ條件(♯)ヲ満足スルトキハ有限次元デアル。

(證) Xヲ條件(♯)ヲ満足スルσ-完全ベクトル束トスル。$a_i \frown a_j = 0$，$(i \neq j)$ナル$\{a_i\}$ガ存在スルトキハ，$e = \bigvee a_i$トオク。

主イデヤル$\mathfrak{a}(e)$ハ條件(♯)ヲ満足スルσ-完全ベクトル束トナルカラ，補題1ニヨリ$\mathfrak{a}(e)$ハ環束ヲ作ル。故ニ$\mathfrak{a}(e)$ノ各要素ハeニ関シテ有界トナル。コレカラ$\mathfrak{a}(e)$ガ有限次元ナルコトガ容易ニ判ル。從ッテ有限個ノa_iダケガ$a_i > 0$トナル。故ニXガ単位ヲモツト考ヘテ一般性ヲ失ハナイ。從テXハ有限次元トナル。

定理1. 條件(#)ヲ満足スル Banach 束ハ有限次元デアル。

(証) Xヲ條件(#)ヲ満足スル Banach 束トスル。$a_i \frown a_j = 0$, $a_i > 0$ ナル$\{a_i\}$ガ存在スルトキ, 任意ノ実数列$\{\lambda_i\}$ニ對シ假定ニヨリ $\sum \lambda_i a_i$ ハ (0)-収斂スル。カヽルモノノ全体ニ補題2ヲ使ッテ$\{a_i\}$ハ有限集合トナル。故ニXニハ単位ガ存在スル。Xガ有限次元デナイトスレバ, $a_i \frown a_j = 0$, $a_i > 0$ ナル可附番無限集合ヲトリ出セルコトガコレカラ容易ニ判リ矛盾ガ起ル。

補題2或ハ本定理カラ (S), (s)-空間ハノルムノ導入ニヨッテ Banach 空間トナリ得ナイコトガ判ル。[1] 之レヲ定理ノ形デ表ハスト

補題3. (#)ヲ満足スル K_6^- 型"正則"F-束ハ単位ヲモツ K_6 型"正則"束デアル。有限次元デナイトキハ"正則"性ノ improper axiom ヲ満足シナイ。マタコノベクトル束ガノルムノ導入ニヨッテ Banach 空間ニナル條件ハ有限次元ニナルコトデアル。

(証) Xヲ(#)ヲ満足スル K_6^- 型"正則"F-束トスル。Xニ単位ガ存在シナイトキハ, $e_\alpha \frown e_\beta = 0$ 且ツスベテノe_αニ対シ $x \frown e_\alpha = 0$ ノトキ $x = 0$ トナル$\{e_\alpha\}$ヲトルコトガ出来ル。アル正数εニ対シ $\rho(e_\alpha) > \varepsilon$ ヲ満足スル無限個

---

(1) (#)ヲ満足スルベクトル束ハ"正則"性ノ improper axiom ヲ満足シナイ。コレト§4 補題2 (P.1343)ヲ使ッテコノ結論ヲ出シテモヨイ。

e_{α_n}, $n=1,2,\cdots\cdots$ ガ存在スル。$a_n=\bigvee_{m\geq n} e_{\alpha_m}$ ト置クト $a_n\downarrow 0$ トナルカラ $\rho(a_n)\downarrow 0$ トナリ矛盾ガ起ル。故ニ X ハ単位 e ヲモツ。X ガ K_δ 型"正則"ニナルコトハ §1ノ條件(VI) (p.1338) ヲ満足スルコトヲ示セバヨイ。(略) 或ハ次ノ様ニシテモイヘル。$x\in X$ ニ對シ $\rho'(x)=\rho\left(\frac{|x|}{e+|x|}\right)$ ト置クトキ ρ' ニヨリ X ハ K_δ 型"正則" F-束ニナル。ρ ト ρ' トハ位相ヲ変ヘナイ。(§1, 補題5参照) コトカラ X ハ K_δ 型"正則"トナル。補題ノ残リノ部分ハ明カデアラウ。

(s)空間ハ Bochner 束デ (#) ヲ満足スル。逆ニ

定理2. (#) ヲ満足スル Bochner 束ハ有限次元デアルカ計量ヲ適當ニトルト (s)-空間ニナル。

(証) X ヲ (#) ヲ満足スル Bochner 束トスル。補題3ニヨリ X ハ単位 e ヲモツ。X ハ e ヲ環単位トスル環束トナルカラ §9ノ所論カラ列空間デアル。從ッテ計量ノツケカヘデ (s)-空間ニナル。

定理3. (#) ヲ満足スル K_δ 型"正則" F-束ハ，ソノ任意ノ正要素 $a>0$ ニ正値ヲ與ヘル正線形汎函数ガ存在スルトキニハ，有限次元デアルカ或ハ計量ノツケカヘデ (s)-空間ニナル。

(証) §5. 定理1. (p.1345) ノ証明法ニヨリ証明サレル。

定理4. 條件 (N) ヲ満足スルベクトル束ガ (#) ヲ満足スルトキ，有限次元カ或ハ計量ヲ適當ニトルト (s)-空間ニナル。

（証）定理3カラ。

§1カラ§12マデ計量ハ実数トシタガ，計量函数ノ値ヲK_6^-型"正則"ベクトル束ノ要素トシテモ以上ノ所論ノ中デ論ゼラレル部分ガアル。

尚，§5，定理ノハ次ノ様ニ書イタ方ガ判リヨカッタ。

(卅)ヲ満足スルK_6^-型"正則"F-束ノ<u>正規イデヤルノ完全ブール代数ガ原子的要素ヲ含マナイトキ</u>（孤立要素ガ存在シナイトキ）non-trivialナ(o)-連續線型汎函数ハ存在シナイ。

コヽニaガ孤立要素トハ主イデヤル$\mathfrak{a}(a)$ガ正規イデヤルノ完全ブール代数ノ原子的要素ノトキト定義スル。即チ任意ノ$x \in \mathfrak{a}(a)$ガ$x = \lambda a$ノ形ニカヽレルコトデアル。