1080. Fréchet 束ニ就テ(II)[1]

小笠原 藤次郎(廣島文理大)

紙數誌243号"Fréchet束ニ就イテ"ノ所論ヲ續ケル。

§6. 條件(N)ヲ滿足スルベクトル束

ベクトル束ノ各要素ニ高々可附番無限個ノ實數$\|x\|_p$, $p=1, 2, 3, \cdots$ガ對應シ, 條件(N):

(i) $\|x+y\|_p \leqq \|x\|_p + \|y\|_p$, $\|\alpha x\|_p = |\alpha|\|x\|_p$, $p=1,2,3,\cdots$,

但シαハ實數

(ii) $|x| \leqq |y|$ ノトキ $\|x\|_p \leqq \|y\|_p$, $p=1, 2, 3, \cdots$

(iii) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\lim_n \|x_n\|_p = 0$, $p=1, 2, 3, \cdots$

(iv) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq \cdots$, $\lim_n \|x_n\|_p < +\infty$, $p=1, 2, 3, \cdots$ ノトキ $\bigvee_n x_n$ ガ存在スル ヲ滿足スルトキ, コノベクトル束ヲ條件(N)ヲ滿足スルベクトル束ト呼ブ。

條件(N)ヲ滿足スルベクトル束ノ一二ノ例ヲ擧ゲルト

例1. Bochner束: §2例1ノ正線形汎函數$F_p(x)$カラ$\|x\|_p = F_p(|x|)$トスレバ, 上述ノ(i)—(iv)ガ滿足サレル。從ッテ, 條件(N)ヲ滿足スルベクトル束ハ條件(L)ヲ滿足スルベクトル束(即チBochner束ノコト)ノ自然ナ擴張デアル。

例2. K—空間: $\|x\|_p$ガ唯一個カラナルトキハK—空

---

(1) 小笠原藤次郎, Fréchet束ニツイテ, 紙數誌243ヲFréchet束ニ就テ(I)トスル。

間（Kantorovitch空間）ニナル。従テ條件(N)ヲ満足スルベクトル束ハK－空間ト多分ニ性質ヲ共有スルモノト豫想サレル。

<u>例3.</u> $m(E)$ヲ$[0,1]$（abstract set デモヨイ）ノBorel集合族上ノ測度函數，$m[0,1]=1$トスル．ソノ絶対値ノ任意ノ冪ト共ニ可積分ナ可測函數ノ全体ヲ考ヘ，$\|x\|_p = \left[\int_0^1 |x(t)|^p dm\right]^{\frac{1}{p}}$，$p=1,2,\cdots\cdots$ト置クト，條件(N)ヲ満足スルベクトル束トナル。

<u>補題1.</u> 條件(N)ヲ満足スルベクトル束ハ，計量函數

$$\rho(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{2^p}\,\frac{\|x\|_p}{1+\|x\|}$$

ト選ブトキK_6型"正則"F－束ニナリ，ρニヨル收斂ハ(*)－收斂ト同義デアル。ρニヨル位相ヲ変ヘズニBanach空間（従テK－空間）トナル様<u>ノルム</u>ガ導入出来ル條件ハ，$\sum \alpha_p\|x\|_p<+\infty$ガスベテノ$x$ニ對シテ成立ツヤウ正數列$\{\alpha_p\}$ヲ選ブコトガ出来ルコトデアル。

（証）$\rho(x)$ニ對シ，§1ノ(I)―(VI)ノ成立ガ容易ニ判ルカラ，條件(N)ヲ満足スルベクトル束ハK_6型"正則"F－束デアル。ρニヨル位相ヲ変ヘズニ，$\|x\|$ナル<u>ノルム</u>ノ導入ニヨッテBanach空間トナルトスレバ，$\|x\|_p \leqq C_p\|x\|$ナル常數C_pガ存在スルカラ本補題ノ$\{\alpha_p\}$ノ存在ガ云ヘル。逆ニ本補題ノ$\{\alpha_p\}$ガ存在スルトキ，$\|x\|=\sum_1^\infty \alpha_p\|x\|_p$ト置

ケバ K－空間ニナルコトガ云ヘル。

本補題カラ (δ)－空間ハノルムノ導入ニヨッテ Banch 空間ニスルコトガ出来ナイコトガ判ル。序ニ例3ニ於テ trivial ナ場合（有限個ノ点ニ mass ガ集中シテイルトキ）ヲ除イテ，ノルムニヨッテ Banach 空間ニスルコトハ出来ナイ。（証明ニハ §4，定理3ヲ使ヘバヨイ。同定理ハ筆者ノ不注意ニヨリ条件ガ落チテイル。K_6^- 型（K_6 型）ヾ正則" F－束ガ<u>単位 e ヲモツ環束ノトキ</u> ノルム------ ト読ンデ戴キタイ）。

$\|x\|_p$ ハ必要アルトキハ；$\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$ ト考ヘテ差支ヘナイ。（$\|x\|_1+\|x\|_2+\cdots\cdots+\|x\|_p$ ヲ $\|x\|_p$ ト考ヘレバヨイカラ。）

<u>補題2</u>. 条件 (N) ヲ満足スルベクトル束ニ於テ，$\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$ ガ成立ツトキ，線形汎函数 $F(x)$ ニツキ次ノ二ツノ命題ハ同義デアル。

(1°) $F(x)$ ハ ρ ニ関シテ（或ハ (※)－位相デ）連続デアル。

(2°) $F(x)$ ハアル $\|x\|_p$ ニ関シテ連続デアル。

(証) (2°) → (1°) ハ殆ンド自明。(1°) － (2°) ノ証. $\rho(x)<\varepsilon$ ノトキ $|F(x)| \leqq 1$ トスル。p ヲ充分大ニトリ，$\displaystyle\sum_{n>p} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ニトル。マタ $\|x\|_p < \delta$ ノトキ $\displaystyle\sum_{1}^{p} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ニトルト，$\|x\|_p < \delta$ ノトキ $|F(x)| \leqq 1$ トナリ $F(x)$ ハ $\|x\|_p$ ニ関シテ連続ニナル。

定理1. 条件 (N) ヲ満足スルベクトル束ハ弱完備[1]，〔別記〕

マタ如何ナル區間モ列的弱コムパクトデアルト同時ニ弱ビコムパクトデアル。

(證) 紙數誌240号，"K-空間ニツイテ" ノ定理7·3，定理7·4ヲ使ツテ證明スル。弱完備性ト區間，弱ビコンパクトヲ云フニハ，

(*) 任意ノ正要素 $x>0$ ニ正値ヲ與ヘル有界線形汎函數（正線形汎函數ノ差トシテ表ハサレル汎函數ノコト）[1]ガ存在スル。

(α) $x_\delta \downarrow 0$ ナル directed set ニ對シ，スベテノ有界線形汎函數 $F(x)$ ニ対シ $F(x_\delta)\to 0$.

(β) Eヲ $x, y \in E$ ノトキ，$x, y \leqq z \in E$ ナル z ノ存在スル正要素ノ集合トスル。如何ナル正有界線形汎函數 $F(x)$ ニ對シテモ，$l.u.b\,(F(x);\ x\in E) < +\infty$ ノトキ $\sup E$ ガ存在スル。

ヲ證明スレバヨイ。コノウチ (*)，(α) ハ自明デアル。(β) ニツイテハ，$\sup E$ ガ存在セズトスレバ，K_δ 型"正則"ノ性質カラ $x_n\in E$，$x_n < x_{n+1}$ ナル (o)-有界デナイ $\{x_n\}$ ガ存在スル。然ルニ $\|x\|_p$ ニ關スルスベテノ有界線形正汎函數Fニ対シ，$\lim_n F(x_n) < +\infty$。故ニ $\lim_n \|x_n\|_p < +\infty$，$p=1,2,3,$ -----。従ッテ條件(N)，(iv) カラ $\bigvee_n x_n$ ガ存在シ，$\{x_n\}$ ガ (o)-有界デナイトシタコトニ矛盾スル。次ニ a ヲ任意ノ正要素トシ，區間 $(x;\ 0\leqq x\leqq a)$ カラノ任意ノ要素列 $\{x_n\}$

---

(1) 有界線形汎函數（正線形汎函數ノ差トシテ表サレルモノ，Kantorovitch ノ正則線形函數ノ意）ニ關シテノ意。以下同様。

ヲ考ヘル。後ニ証明スル定理（§8. 定理2）ニヨリ，対角線論法ヲ使ッテ $\{x_n\}$ カラ収斂部分列ヲトリ出スコトガ出来ル。

Bochner 束ニ本定理ヲ適用スレバ，次ノ定理ヲ得ル。

定理2. Bochner 束ハ弱完備デアル。任意ノ區間ハ列的弱コムパクト且弱ビコムパクトデアル。

本§デハ X ヲ條件(N)ヲ満足スルベクトル束トスル。X ノ有界線形汎函数ノ全体ノ作ル完全ベクトル束ヲ $\overline{X}$ デ表シ，$\|x\|_p$ ニ関シテ連續ナ線形汎函数ノ全体ヲ $\overline{X}_p$ トスル。$\overline{X}_p$ ハ周知ノヤウニ Banach 束ト考ヘラレル。$\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$，$p=1, 2, \cdots\cdots$ ノトキハ補題2ニヨリ $\overline{X}=\sum \overline{X}_p$，$\overline{X}_p \subset \overline{X}_{p+1}$ ト表サレル。以下 $\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$，$p=1, 2, \cdots\cdots$ トシテ論ズル（之ニテ一般性ハ失ハレナイ）。

定理3. X ヲ條件(N)ヲ満足スルベクトル束トスル。$\overline{X}$ ガ K_δ^- 型"正則"ベクトル束ノトキ X ハ Banach 空間トシテ，正則ナ Banach 束デアル。

（証）$\overline{X}_n=\overline{X}_{n+1}=\cdots\cdots$ ナル n ノ存在ヲ証明スル。カヽル n ガ存在シナケレバ，正線形汎函数列 $\{F_n\}$ ヲ $F_n \in \overline{X}_{i_n}$，$F_n \neq \overline{F}_j$ $(j<i_n)$ $i_1<i_2<\cdots\cdots$ ナルヤウニトルコトガ出来ル。$\overline{X}$ ノ K_δ^- 型"正則"性カラ，$\sum \alpha_p F_p \in \overline{X}$ ナル正数列 $\{\alpha_p\}$ ガ存在スル。

然ルニ，明ラカニ，$\sum \alpha_p F_p \in \overline{X}_n$ ナシ $\overline{X}_n$ ガ存在シナイ。$\overline{X}_n=\overline{X}_{n+1}=\cdots\cdots$ トスレバ，$p \geqq n$ ニ対シテハ $\|x\|_p=0$ ト $x=0$ ハ同義デアル。$\overline{X}_n=\overline{X}_{n+1}$ カラ $\overline{X}_n$ ト $\overline{X}_{n+1}$

ハ Banach 空間トシテ Banach ノ意味ノ同型トナルカラ,[1] $\frac{1}{m}\|x\|_{n+1} \leqq \|x\|_n \leqq \|x\|_{n+1}$ ナル m ガ存在スル。$\|x\|_{n+2}$, ----- ニ対シテモ同様. X ハ $\|x\|_n$ ニヨルベクトル束ト考ヘラレルカラ, X ハ K-空間デアル. $\bar{X}$ ノ $K_{\bar{\delta}}$ 型"正則"性カラ X ハ Banach 空間トシテ正則ナ Banach 束ニナル. (紙数誌 240号前掲定理4.1参照)

コレカラ容易ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理4. X ヲ Bochner 束トスル. $\bar{X}$ ガ $K_{\bar{\delta}}$ 型"正則"ベクトル束ノトキ X ハ有限次元デアル。

定理5. X ヲ條件(N) ヲ満足スルベクトル束トスル. $\bar{X}_p$ ガ $p=1, 2,$ ----- $K_{\bar{\delta}}$ 型"正則"ノトキ($\bar{X}_p$ ガ K-空間トイフコトニ同義. マタ $\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$ ノタメ有限個ノ $\bar{X}_p$ ニ對シ例外ハアッテモヨイ), $X = \bar{\bar{X}}$ トナル。

(証) $\|x\|_p \leqq \|x\|_{p+1}$ トシテ論ズ。

定理1ノ証明カラ X ハ條件(*), (α), (β) ヲ満足スル. $\bar{X}$ ガ (α) ヲ満足スルコトヲ云ヘバヨイ. (紙数誌 240号, 前掲, 定理7.2) $\{F_\delta\}$ ヲ $F_\delta \downarrow 0$ ナル $\bar{X}$ ノ directed set トスル. $F_\delta \in \bar{X}_p$ ナル p ガ存在スルトシテヨイ。コレカラ (α) ノ成立ガスグ判ル。

以上ノ定理ヲ例題ニヨッテ説明スルニ, X ヲ Lebesgue 測度ニ関スル例3ノベクトル束トスレバ, $\bar{X}$ ハ少クトモ一ツノ正数 α ニ対シ絶對値ノ (1+α) 乗ガ可積分トナル函数ノ

---

(1) Banach 束デハノルムニヨル收斂ト相對一様(*)ー收斂トガ同義ナルコトヲ注意スレバスグ判ル。

全体カラナルベクトル束デアル。$\overline{X}$ハコノ場合$K_{\bar{6}}$型デ正則デナイ。[1] 然シ$X=\overline{X}$トナル。マタXトシテ(s)－空間ヲトレバ，$\overline{X}$ハ$K_{\bar{6}}$型正則デナイガ$X=\overline{\overline{X}}$ナル性質ヲモッテヰル。

§7. Bochner束ノ有界線形作用素

本節デハXヲBochner束トスル。Xノ正要素aニ對シ，主イデヤル$\mathfrak{a}(a)$ヲX_aト置ク。正数列$\{\alpha_p\}$ヲ$\sum \alpha_p F_p(a) < +\infty$ナル様ニトリ，$\phi(x)=\sum \alpha_p F_p(x)$トオキ，$L_a=(x;\ \phi(|x|)<+\infty,\ x\in X_a)$トスレバ$L_a$ハ抽象L－空間ニナル。

定理1. Bochner束XカラN條件(N)ヲ満足スルベクトル束Yヘノ線形作用素Uニツイテ次ノ命題ハ同義デアル。

(1°) $U(x)$ハ正線形作用素ノ差トシテ表ハサレル。(Kantorovitchノ意味ノ正則，Birkhoffノ意味ノ有界)

(2°) $U(x)$ハ(o)－收斂列ヲ(o)－收斂列ニ移ス。(Kantorovitchノ意味デ$U\in H^{\circ}_{\circ}$。以下單ニ(o)－連續トfive)

---

(1) コレカラ可積分函数ノウチ，如何ナル$\alpha>0$ニ対シテモ絶対値ノ$(1+\alpha)$乗ガ可積分ニナラナイモノガ存在スルコトガ判ル。從ッテマタ$\beta>1$トスルトキ絶対値ノβ乗ガ可積分ナルモ，如何ナル$\alpha>0$ニ対シテモ絶対値ノ$(\alpha+\beta)$乗ガ可積分デナイモノノ存在ガ判ル。

(3°) $U(x)$ ハ (*)-收斂列ヲ (*)-收斂列ニ移ス。

(Kantorovitch ノ意味デ $U \in H_t^t$, 以下單ニ (*)-連續トイフ)

(證) (1°) ト (2°) ノ同義ハ Kantorovitch ノ定理カラ。[1]

(2°) → (3°) ハ自明、(3°) → (1°) ヲ示セバヨイ。a ヲ X ノ任意ノ正要素トシ、a ヲ正要素ノ和，$a = \sum_1^n x_i$ トシテ $\sum_1^n |U(x_i)|$ ヲ作リ，カヽルスベテノ $\sum_1^n |U(x_i)|$；集合ヲ E トスル。E ガ (o)-有界デアルコトヲ示セバヨイ。$y_1, y_2 \in E$ ノトキ $y_1, y_2 \leqq y_3 \in E$ ナル y_3 ガ存在スル。[2] E ガ (o)-有界デナイトスレバ，$y_n < y_{n+1}$, $y_n \in E$ ナル (o)-有界デナイ $\{y_n\}$ ガ存在シ，L_a カラ Y ヘノ作用素トシテ $U(x)$ ハ (*)-連續デアル，$x \in L_a$ ニ対シ $\|x\| = \Phi(|x|)$ ト置ク。

$\|U\|_p = l.u.b.\ (\|U(x)\|_p ;\ \|x\| \leqq 1,\ x \in L_a)$ トスレバ

$\|U\|_p < +\infty$. マタ E ヲ $y = \sum_1^n |U(x_i)|$ ニ対シ $\|y\|_p \leqq \|U\|_p (\sum_1^n \|x_i\|)$

$= \|U\|_p \|a\|$ ノタメ $\lim_n \|y_n\|_p < +\infty$ トナリ，$\bigvee_n y_n$ ガ存在スルコトニナリ，矛盾ガ起ル。

定理2. Bochner 束 X カラ X ヘノ線形作用素ニツイテ前定理ガ成立ツ。

---

(1) L. Kantorovitch, 49 (1940) 227 頁，定理 8 カラ.

(2) L. Kantorovitch. 同上，231 頁，定理 11 ノ証明参照. 本文ノ定理ハコノ定理ヲ拡張シタモノニスギナイ。

定理3. Bochner束カラK-空間ヘノ線形作用素ニツイテ定理1ガ成立ツ。

§8. F-束ノ計量的完備化

定理1. Xヲ§1ノ(I)—(IV)ヲ満足スル単位eヲモツσ-完全ベクトル束トスル。Xノ$\rho(x)$ニヨル完備化ハK_δ型"正則"Fréchet束ニシテ，Xノ任意ノ区間ハ完備化ニヨッテ影響ヲ受ケナイ。

(証) X_1ヲρニヨルXノ完備化トスル。X_1ハベクトル束ナルコトハ自明。X_1ニ於テ(IV)ガ成立スルコトヲ云ヘバヨイ。$\{X_n\}$ヲXノ(o)-有界ナ基本列トスル。$\{x_{i_n}\}$ヲ$\rho(x_j-x_{i_n})\leqq\frac{1}{2^n}$，$j>i_n$ナルヤウニトル。$i_1<i_2<\cdots$トシテヨイ。

$$\bar{x}_n=\bigvee_{p\geqq n}x_{i_p},\quad \bar{x}=\bigwedge_n\bar{x}_n,\quad \underline{x}_n=\bigwedge_{p\geqq n}x_{i_p},\quad \underline{x}=\bigvee_n\underline{x}_n$$

ト置ケバ$x_{i_n}\cup x_{i_{n+1}}\cup\cdots\cup x_{i_m}-x_{i_n}\cap x_{i_{n+1}}\cap\cdots\cap x_{i_m}\leqq\sum_n^{m-1}|x_{i_{p+1}}-x_{i_p}|$カラ(IV)ヲ使ッテ$\rho(\bar{x}_n-\underline{x}_n)\leqq\frac{1}{2^{n-1}}$，然ルニ$\bar{x}_n\geqq\bar{x}\geqq\underline{x}\geqq\underline{x}_n$カラ$\rho(\bar{x}-\underline{x})=0$，即チ$\bar{x}=\underline{x}$。従ッテ$\{x_{i_n}\}$ハ$\bar{x}$ニ(o)-収斂スル，コレカラ$\rho(x_n-\bar{x})\to 0$トナル。

今$z\in X_1$ヲ任意ノ正要素トスル。$\{x_n\}$ヲ$x_n\in X$，$\rho(x_n-z)\to 0$トスル。$x_n\geqq 0$トシテ差支ヘナイ。$|z\cap pe-x_n\cap pe|\leqq|z-x_n|$ノタメ$\rho(x_n\cap pe-z\cap pe)\to 0$。故ニ$z\cap pe\in X$。コレカラ$\rho(z\cap pe-z)\to 0\ (p\to+\infty)$ガ

知ラレル。今$\{z_n\}$ヲ$z_n \downarrow 0$ナルXノ要素列トシ，pヲ充分大ニトッテ$\rho(z_1 - z_1 \frown pe) \leqq \varepsilon$ナラシムレバ$z_n - z_n \frown pe \leqq z_1 - z_1 \frown pe$ノタメ$\rho(z_n - z_n \frown pe) \leqq \varepsilon$. 且$n \to +\infty$ノトキ$z_n \frown pe \downarrow 0$トナルカラ$\rho(z_n \frown pe) \downarrow 0$. コレカラ$\rho(z_n) \downarrow 0$ガ証明サレル。$X_1$ガ$\sigma$－完全ナルコトヲ証スレバ§1. 補題7及ビ定理1ニヨリX_1ハK_δ^-－型"正則"F－束ニナル。

以下ソノ証明。 $\{z_n\}$ヲ(o)－有界ナX_1ノ正要素ノ列トスル。$z_n \leqq z_{n+1} \leqq z$ナル$z \in X_1$ガ存在スルトスル。$p$ニ對シ$x_p = \bigvee_n (z_n \frown pe)$トオクト$x_p \in X$. pヲ充分大ニトリ$\rho(z - z \frown pe) \leqq \varepsilon$ナラシメルト，$q > p$ニ対シ$z - z \frown pe \geqq z \frown qe - z \frown pe \geqq z_n \frown qe - z_n \frown pe$ノタメ$z - pe \geqq x_q - x_p$。故ニ$x_p$ハ$\rho$ニ関スル基本列ヲ作ル。ソノ極限ヲ$z_0$トスレバ$z_0 = \bigvee_n z_n$ナルコトヲ容易ニ確メラレル。

定理2. Xヲ，ソノ各要素xニノルムガ定義サレ

(1) $\|x\| \geqq 0$, $x = 0$ノトキニ限リ$\|x\| = 0$

(2) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(3) $|x| \leqq |y|$ノトキ$\|x\| \leqq \|y\|$

(4) $x_n \downarrow 0$ノトキ$\|x_n\| \to 0$

ヲ満足スルσ－完全ベクトル束トスレバ，Xハ完全ベクトル束ニシテXノ任意ノ区間ハ列的弱コムパクト且弱ビコムパクトデアル。

(証) 定理1カラ

(注意) 本定理ニ於テXガ単位ヲモツトキハソノ完備化

ハK－空間デアル。

條件(N)ヲ滿足スルベクトル束ハ謂ハゞK－空間ノ拡張デアル。從ッテK^-－空間ニ對應スル擴張ガ考ヘラレル。コノタメニハ σ－完全ベクトル束ニ於テ§6ノ(i)―(iii)ノ外ニ次ノ條件(V)ヲ要求スル。

(V) $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n \leqq \cdots\cdots$，$\lim_n \lim_m \| x_{n+m} - x_n \|_p = 0$ $p=1, 2, 3, \cdots\cdots$ ノトキ $\bigvee_n x_n$ ガ存在スル。

斯クノ如ク§6ノ(i), (ii), (iii)及ビ(V)ヲ滿足スル σ－完全ベクトル束ヲ條件(N^-)ヲ滿足スルベクトル束ト呼ブ。計量函數$p(x)$ヲ§6ニ於ケルト同樣ニトルトキハ，コノベクトル束ハ$p(x)$ニヨリK_6^-型"正則"F－束ニナル。(V)ヲ滿足シナイトキハ，$\|x\|_p = 0$，$p = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ト$x=0$ガ同義デ且ツ單位ヲモツトキハ定理1ニヨリ，$p(x)$ニヨル完備化ヲ考ヘルト條件($N^-$)ヲ滿足スルベクトル束トナル。

定理4. §6ノ(i), (ii), (iii)及ビ$\|x\|_p = 0$，$p=1, 2, 3, \cdots\cdots$ト$x=0$トガ同義トナル σ－完全ベクトル束(從テ條件(N^-)ヲ滿足スルベクトル束ヲ含ム)ノ任意ノ區間ハ列的弱コムパクト且弱ビコムパクトデアル。

定理5. Xヲ條件(N^-)ヲ滿足スルベクトル束トスル。$\overline{X}$ガK_6^-型"正則"ノトキXハK^-－空間デソノ共軛空間$\overline{X}$ハK－空間デアル。

(証) §6，定理3ノ証明ニ準ズル。

§9. 環束ヲ作ルBochner束

補題1　Xヲ條件(N^-)ヲ滿足スルベクトル束トスル。Xガ廣義ノ列空間[1]ナルタメノ條件ハ(※)位相デXノ任意ノ区間ガコムパクトニナルコトデアル。

(証)　$\mathfrak{N}_p$ヲ$\|x\|_p=0$ナルx全体ノ作ル正規イデヤルトシ，$\mathfrak{N}_p$ニ直交スル要素ノ全体ヲX_pトスル。X_pハ$\|x\|_p$ニヨリ各区間ガコムパクトニナルカラX_pハ広義ノ列空間ニナル。[2]　コレカラXガ廣義ノ列空間ニナルコトガ証明出来ル。

補題2.　Bochner束ガ廣義ノ列空間ニナルタメノ條件ハ任意ノ区間ガ(※)－位相デコムパクトニナルコトデアル。

(注意)　補題1及ビ補題2ニ於テ空間ガ列空間ニナル條件ハ單位eヲモチ區間$(x;\ 0\leqq x\leqq e)$ガ(※)－位相デコムパクトニナルコトデアル。

定理1.　Bochner束ガ環束(積ノ結合則ハ假定スルニ及バナイ[3])ヲ作ルトキ，列空間ニナル。

---

(1)　$e_\alpha\frown e_\beta=0,\ \alpha\neq\beta$ナル$\{e_\alpha\}$ガ存在シ，任意ノ$x$ガ$x=\sum\lambda_\alpha e_\alpha$(可附番個ノ$\lambda_\alpha$ノミ0デナイ)ト書カレルコト。$\{e_\alpha\}$ガ可附番ノトキ單ニ列空間ト云フコトニスル。§3定理2デハ廣義ノ列空間ヲ單ニ列空間ト呼ンダ。

(2)　小笠原藤次郎，廣島文理大紀要，11(昭17)．127頁定理4ノ証明参照。

(3)　紙上談話232号談話1011参照。

(証) 環束ヲ作ルBochner束ヲXトシ，環束ノ単位ヲeトスル。eヲ1トスル様ニXヲ表現ブール空間Ω上ノ連続函数ヲ表現スル。$x\in X$ニハ$f_x(\xi)$ガ應ズルトスル。ベクトル値測度函数$\mu(E)$ヲ考ヘ，§7ノaヲeトシテL_e及ビ$\Phi(x)$ヲ考ヘル，$\omega(E)=\Phi(\mu(E))$トスレバ$\omega(E)=0$トEハ第一種集合トハ同義ニナル。Ω上ωニ関シテ可積分函数ニ對等ナ連續函数ノ全体トL_eノ表現函数ノ全体ガ一致スル。

Fヲ任意ノ正線形汎函数トスレバ，$x\in L_e$ニ対シ$F(x)=\int_\Omega f_x(\xi)\varphi(\xi)d\omega$ナル有界連続函数$\varphi(\xi)\geqq 0$ガ存在スル。任意ノ$y\in X$ニ對シ$F(xy)=\int_\Omega f_x(\xi)f_y(\xi)\varphi(\xi)d\omega$, $x\in L_e$トナル。[1] λヲ任意ノ正数トスルトキ，$\Omega_\lambda=(\xi;\ \varphi(\xi)>\lambda)$トスレバ$\int_{\Omega_\lambda} f_x(\xi)f_y(\xi)d\omega<+\infty$ガ$\Omega_\lambda$上ノ任意ノ可積分函数$f_x(\xi)$, $f_y(\xi)$ニ成立スル。從テΩ_λト對等ナ基本開集合ヲ$\mathfrak{a}^*(e_\lambda)$（$e_\lambda$ハ$e$ニ関スル特性要素，$\mathfrak{a}^*(e_\lambda)$ハ$\mathfrak{a}(e_\lambda)$ニ對應スル$\Omega$ノ集合）トスレバ$\mathfrak{a}(e_\lambda)$ハ有限次元ニナル。換言スレバ$e_\lambda$ニ関スル特性要素ハ有限ナブール代数ヲ作ル。$F_p$, $p=1,2,\cdots\cdots$ヲFト考ヘルコトニヨリ，eニ関スル特性要素ノブール代数ガ原子的ニナルコトガ証明サレル。コレカラ

---

(1) $m(E)=F(x\mu(E))$トスレバ$F(xy)=\int_\Omega f_y(\xi)\,dm(E)$，然ルニ$m(E)=\int_E f_x(\xi)\varphi(\xi)d\omega$カラ$F(xy)=\int_\Omega f_x(\xi)f_y(\xi)\varphi(\xi)d\omega$

Xハ列空間ニナル。

定理2. Bochner束ガ(s)空間ニナル條件ハ $\{F_p\}$ ヲ $F_p \frown F_q = 0$ $p \neq q$ ナル可附番無限集合ニ選ブコトガ出来且環束ヲ作ルコトデアル。

(証) §4, 定理3 (§6, 補題1ニ於ケル訂正参照) ヲ使ツテ。

Xヲ Bochner 束トシ，ソノ表現ヲ考ヘテ見ル。正規イデヤルノ完全ブール代数Nノ表現ブール空間ヲ Ω_N トシ，Xカラ $\{e^{(\alpha)}\}$ ヲ $e^{(\alpha)} \frown e^{(\beta)} = 0$, $\alpha \neq \beta$ 且ツスベテノ $e^{(\alpha)}$ ニ對シ，$x \frown e^{(\alpha)} = 0$ ノトキ $x = 0$ ナル様ニトル。Xヲ $e^{(\alpha)}$ ガ $\mathfrak{N}^*(e^{(\alpha)})$ ノ特性函数トナル様ニXヲ Ω_N 上ノ連續函数デ表現スル。ベクトル値測度函数 $\mu(E)$ ヲEノ特性函数ト對等ナ連續函数ヲ表現函数トスルXノ要素ガ存在スルトキ，之ニ等シイト置キ，然ラザルトキハ $+\infty$ ト置ク。$m_p(E) = F_p(\mu(E))$, 但シ $\mu(E) = +\infty$ ノトキ $m_p(E) = +\infty$ ト定メル。コノトキXノ表現函数ノ全体ハスベテノ m_p, $p = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ關シ可積分函数ノ全体（對等ナ函数ハ同一ト見ル）ト一致スルコトガ証明サレル。

從ツテ大ザッパニ云ツテ Bochner 束ハ抽象集合ノ Borel 族ニ定義サレタ高々可附番個ノ測度ニ關シ可積分函数全体ノベクトル束ト看做スコトガ出来ル。

§10. Banach 束ニ於ケル積ニ關スル一注意

Xヲ單位eヲモツ Banach 束トスル。正要素 x, y ノ

積ヲ定義スルニ, x, y ガ夫々 e ニ関シテ有界ノトキハ e ヲ積単位トスル積 xy ヲ一意ニ定メル方法ハ色々アルガ, 要スルニカヽルトキ xy ガ定義サレタトスル。x, y ガ e ニ関シテ必ズシモ有界デナイトキハ $\{(x \wedge ne)\cdot(y \wedge ne)\}$ ガ (o)-有界ノトキニ限リ, ソノ上端トシテ xy ガ定義サレルノデアル。x, y ガ正要素デナイトキ x, y ヲ $x_+y_+ - x_-y_+ - x_+y_- + x_-y_-$ ト定義スレバヨイ。従ッテ $|x||y|$ ガ存在スルトキニ限リ xy ガ定義サレルコトニナル。

定理1. Banach 束 X ニ於テ $x_0 \in X$ ガ他ノスベテノ要素トノ積ガ可能ナルタメノ條件ハ x_0 ガ e ニ関シテ有界トナルコトデアル。

(証) 充分ナルコトハ自明。

必要ナルコトノ証. x ヲ正要素トシテ一般性ヲ失ハナイ。xy ハ y ノノルムニ関スル連続函数ニナル。何者 Banach 束デハノルムニヨル収斂ト相對一様(*)-収斂ガ同義ニナルカラ。$\|x.y\| \leqq c\|y\|$ ナル正数 c ガ存在スル。

故ニ $\|x^2y\| \leqq c\|xy\| \leqq c^2\|y\|$ カラ $\|x^n\| \leqq c^{n-1}\|x\|$ ガ云ヘル。$x' = \frac{1}{c}x$ トオクト $\|x'^n\| \leqq \|x'\|$. 今 x' ガ $x' \leqq e$ ヲ満足シナイトキハ, X ヲ e ガ 1 トナルヤウニ表現スルコトニヨリ, $x'^n \geqq na$, ナル $a > 0$ ノ存在ガ容易ニ判ル。$\|na\| \leqq \|x'\|$ カラ $a = 0$ トナリ矛盾ガ起ルカラ, $x' \leqq e$ デナケレバナラヌ。

本定理ハ §4 定理1ノ部分的拡張デアル。尚 §4 ノコノ定理ノ証明ニ Dunford ノ定理或ハ Gelfand ノ方法ヲ使

フコトヲ述ベタガ仮ハナイデモ簡単ニイヘル。xyガxトyノ函数ト考ヘテ連続ニナル（ノルムニヨル収斂ト相對一様(的)ニ収斂ノ同義カラ）

故ニ$\|xy\| \leqq C\|x\|\|y\|$ナル正数Cガ存在スル。$\|x\|_0 = l.u.b.(\|xy\|;\ \|y\| \leqq 1)$ト定義スレバ$\|e\|_0 = 1$, $\|xy\|_0 \leqq \|x\|_0\|y\|_0$, $\frac{1}{\|e\|}\|x\| \leqq \|x\|_0 \leqq C\|x\|$トナルカラ, $\|x\|_0$ニヨリ同義ナBanach束ガ得ラレル。尚同証明ニ於テ$\|x\| \leqq \|x\|$, トシタガソノスグ上ニ述ベタコトカラ$\|x\| \geqq \|x\|$, 従ッテ$\|x\| = \|x\|$, ト改メル。