1077. Markoff過程ヲ定メル微分方程式

伊藤 清(内閣統計局)

ハシガキ

(I) 有限個ノ可能ナ場合 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_m$ ヲ有シ, 自然數ヲ径數トスル simple Markoff process $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ニ関シテ 多クノ遷移確率ヲ考ヘルコトが出来ル, 例ヘバ $x_k = a_i$ ナル條件ノ下ニ於ケル $x_l = a_j$ ノ確率、或ハ $x_1 = a_{i_1}$, $x_2 = a_{i_2}, \cdots\cdots, x_n = a_{i_n}$ ナル條件ノ下ニ於ケル $x_{n+1} = a_{i_{n+1}}$ トナル確率等々。シカシ乍ラソレ等ハ結局 $x_k = a_i$ ノ時ノ $x_{k+1} = a_j$ ナル確率 $p_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \cdots\cdots, i, j = 1, 2, \cdots\cdots m$) ニ帰着セラレル。コレハ Kolmogoroff ノ本(※1) ニモ書イテアル。以後コレヲ基本的ナ遷移確率ト呼バウ。

更ニ可能ナ場合が有限デナクトモ、例ヘバ実數ヲ以テ標識ヅケラレル時ニハ、同ジコトがイヘルノハ云フマデモナイ。

併シナガラ径數が自然數デナクテ實數ノ場合即チ continuous parameter ニ依存スル Markoff process ニ於テ、上ノコトハ如何ニナルカトイフコトハソレ程簡單デハナイ。(※2)

更ニ一般ニ可能ナ場合が実數ニヨリ標識付ケラレ、且ツ continuous parameter ニ依存スル simple Markoff process ニ於テ、上ノ $p_{ij}^{(k)}$ ニ相當スルモノヲ考ヘ、逆ニ之レヲ與ヘテ、モトノ Markoff process ヲ定メルトイフコトハ、Kolmogoroff(*3) ニヨッテ体系的ナ研究ガ創メラレ、ソレハ結局遷移確率函數ニ關スル differential equation 或ハ integro-differential equation ノ研究ニ帰着セシメラレタ。

W. Feller(*4) ガコレラノ方程式ガ唯一ツノ解ヲ有シ、而モソノ解ガ遷移確率函数ノ性質ヲモッテヰルコトヲカナリ強イ條件ノ下ニ証明シテヰル。

併シナガラ確率過程ノ研究ニ對シテ Doob(5) ガトッタヤウナ嚴格ナ態度ヲ持スルトスレバ、コノ Feller ノ研究モ些カ不充分ナ点ガアルヤウニ思ハレル。例ヘバソノ §3 ニ於テ連續ナ確率過程ノ遷移確率函數ヲ定メル微分方程式ガ解カレテヰルガ、ソノ解ヲ以テ"連續"函數空間ニ確率ヲ導入スルコトノ可能性ノ証明ガ不足シテ居ルヤウニ思ハレル。

本稿ノ目的ハ I. 問題ノ Formulierung ヲ明確ニスルコト. II. 連續ナ確率過程ノ存在証明ヲ Doob ノヤウナ意味デ嚴密ニスルコトデアル。

II. 注意——x ヲ実確率変數トスル時. x ニ関スル命題ハ結局" $x \in E$ "（E ハ R^1 ノ部分集合）ナル形デ表ハサレル。

故ニ $x^{-1}(E)$ ガ P－可測デアレバ " $x \in E$ " ナル命題ヲ考ヘルコトガ意味ガアル。又 $x \sim x'$ 即チ $P(x \neq x') = 0$

デアル場合ニハ $(x\in E)$ ト $(x'\in E)$ トノ symmetric difference ノ P-measure ハ 0 デアルカラ "$x\in E$" ナル命題ハ"許サレル[*6]概念構成"デアル。

次ニ x, y ナル二ツノ実確率変数ガアル時、x ト y トニ関スル命題ハ結局 "x ト y トノ結合変数 (x, y) ガ R^2 ノ或ル部分集合ニ入ル" トイフ風ニアラハサレル。例ヘバ "$x<y$" ハ "$(x, y)\in F\{(\lambda, \mu);\ \lambda<\mu\}$" ニテ表ハサレル。故ニソノ R^2 ノ部分集合ガ Borel 集合デアレバ、モトノ命題ハ明カニ考察可能デアル。

更ニ可附番個ノ変数ニ関係シタ命題ニツイテモ同様デアル。然ルニ非可附番個ノ変数ニ関係シタ命題トナルト事情ガ少々変ッテ来ル。蓋シ非可附番個ノ確率変数ノ結合ハ一般ニハ"許サレナイ概念"デアルカラデアル。[*7]

例ヘバ連續的ナ parameter t ニ依存スル実確率変数 x_t ガアルトキ、"x_t ガ t ニ関シテ連續デアル"、"x_t ノ上限ガ M デアル" 等トイフ命題ガ考ヘ得ルタメニハ x_t ノ結合変数ヲ定義シナケレバナラナイ。コヽニ問題ガアル。(勿論 x_t ガ $t=t_0$ ニ於テ確率収斂ノ topology ニ関シテ連續デアルトイフノデアレバソレハ $\lim\limits_{t\to t_0} P(|x_t-x_{t_0}|>\varepsilon)=0$ ニテアラハサレ、ツマリ $|x_t-x_{t_0}|>\varepsilon$ トイフ x_t, x_{t_0} ノ二ツノ確率変数ニ関スル命題ガ問題ニナルノデアルカラ、上述ノ面倒ナ事ハ起ラナイ)。

而ラバ x_t ガ t ニ関シテ連續デアルトイフヤウナ命題ハ

考ヘラレナイト云フニ、サウデハナイ。

定義　x_t ガ $t(\in(a,b))$ ニ関シテ連續デアルトハ、(a,b) 上ノ連續函數族ヲ値域トスル確率変數 y ガ存在シテ、ソノ t ニ於ケル値 y_t ガ

$$p(x_t = y_t) = 1$$

ヲ満足スルコトデアル。

註1．上ノ如キ y ハ x_t ニ対シテ一義的ニ定マルノデ、コノ y ヲ x_t ノ結合ト呼ビ $(x_\tau;\ a \leqq \tau \leqq b)$ 又ハ単ニ x_{ab} ニテアラハス。又 $\alpha\beta$ ヲ (a,b) 内ノ實數トスルトキ、y ヲ區間 $(\alpha\beta)$ ノ上ノミデ考ヘルト (α,β) 上ノ連續函數族ヲ値域トスル確率変數ガ得ラレル。之ヲ $x_{\alpha\beta}$ ニテ表ハス。

註2．$(y_\tau;\ a \leqq \tau \leqq b)$ ハ y ニ等シイ。コレハ當然ナコトデアルガ　コノ事ガ「y ガ x_{ab} デアル」トイッテヨイ所以デアル：

註3．x_t ガ " t ノ各ノ値デ確率收斂ノ topology ニ関シテ連續デアル" トイフ事ト " x_t ガ上ノ定義ノ意味デ連續デアル" トイフコトトハ一致シナイ。前者ノ場合ニハ " x_t ハ固定不連續点ヲモタナイ" トイヒ、後者ノ場合ニハ " x_t ハ可動不連續点ヲモタナイ" トイッテ區別スルノハ P. Levy(※8) ノヤリ方デアル。(勿論 Levy ノ述ベテ居ルノハ differential process ニツイテヾアルガ)。

故ニ$\{y_t\}$ガ可動不連續点ガナイ時ニハ（y_τ; $a \leqq \tau \leqq b$）ヲ上記ノ意味ニトレバ 次ニ"$|y_\tau|$ガアル有限數Mヨリ小デアル"トイフ命題ヲ考ヘルコトガ出来ル。

I. Differentiation

§1. Markoff process ノ Differentiation ノ定義.

$\{y_t\}$ヲ(simple) Markoff process トシ、"y_{t_0}ガ定マッタ"トイフ條件ノ下ニ於ケル $y_t - y_{t_0}$ ノ確率法則[1]ヲ $F_{t_0 t}$トスル。$F_{t_0, t}$ハ明ラカニ y_t ノ P_{y_t}-可測(ρ)[2]——玆ニρハ Lévy ノ法則距離ヲ表ハス——ナル函數デアル。

定義 1.1[3]

(1) $F_{t_0 t}^{*\left[\frac{1}{t-t_0}\right]}$ （[a]ハaノ整數部分"$*k$"ハk回ノ convolution ヲ表ハス）

ガ"$t \to t_0+0$"ノ時、法則距離ρニ関シテ確率收斂スル時ソノ極限変數（確率分布ヲ値トスル確率変數）ヲ"$\{y_t\}$ノt_0ニ於ケル微係數"トイヒ，$D_{t_0}\{y_t\}$又ハDy_{t_0}ニテ表ハス。

系 1.1. Dy_{t_0}ハ無限ニ分解可能ナ確率分布デアル。[4]

證明. $t_1 \geq t_2 \geq \cdots\cdots \to t_0$ナル点列ヲ適當ニ選ンデ

(3) $F_{t_0 t_n}^{*\left[\frac{1}{t_n-t_0}\right]}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$

ガ確率1ヲ以テ收斂スルヤウニ出來ル。

$F_{t_0 t_n}^{*\left[\frac{1}{t_n - t_0}\right]}$ ガ收斂スル場合ニハ、ソノ極限法則ハ *Khintchine* ノ所謂 "*limit law*" デアルカラ、無限ニ分解可能デアル。

故ニ Dy_{t_0} ハ確率1ヲ以テ、無限ニ分解可能ナ確率法則デアル。

コヽニ得タ Dy_{t_0} ハ t_0 及ビ y_{t_0} ノ函數デ、之レヲ $L(t_0, y_{t_0})$ ト書クコトニスルト、コノ $L(t_0, y_{t_0})$ ガ "ハシガキ" ノ所デ述ベタ "基本的ナ遷移確率" ニ相當スル。

備テ $L(t, y)$ ヲ與ヘテ

$$\boxed{(4) \quad Dy_t = L(t, y_t)}$$

ヲ解クコトガ *Kolmogoroff* ノ問題ノ *Formulierung* デアル。

§2. 後ニ利用スルカラ、Dy_{t_0} ニ關スル比較定理ヲ證明シテ置カウ。

定理2.1. $\{y_t\}$, $\{z_t\}$ ガ次ノ條件ヲ滿ス *simple markoff process* トスル。

(1) $y_{t_0} = z_{t_0}$

(2) $E(y_t - z_t / y_{t_0}) = o(t - t_0)$

(3) $\sigma(y_t - z_t / y_{t_0}) = (\sqrt{t - t_0})$ (o: *Landau* ノ記号)

(註 $E(x/y)$ ハ y ガ定マッタ時ノ x ノ條件附平均値ヲ表

ハシ、$\sigma(x/y)$ ハ同ジ條件ノ下ニ於ケル x ノ標準偏差ヲ示ス。又 O ハ t_0 及ビ y_{t_0} ニ關係シテモヨイ)。

然ラバ DZ_{t_0} ガ存在スルトキニハ Dy_{t_0} モ亦存在シ、且ツ

$$Dy_{t_0} = DZ_{t_0}$$

證明. ε, η ニ對シテ $\delta(\varepsilon, \eta)$ ヲ充分小サクトレバ $|t-t_0| < \delta(\varepsilon, \eta)$ ナル限リ

$$(4) \quad \rho\left(E^{*\left[\frac{1}{t-t_0}\right]}_{Z_t - Z_{t_0}|Z_{t_0}},\ DZ_{t_0}\right) < \varepsilon$$

(5) $F_{x/y}$ ハ y ガ定マッタトイフ條件ノ下ニ於ケル x ノ確率法則デアル.

$$(5) \quad |E(y_t - Z_t / y_{t_0})| < \varepsilon(t-t_0)$$

$$(6) \quad [\sigma(y_t - Z_t / y_{t_0})]^2 < \varepsilon(t-t_0)$$

ノ成立スル確率ハ $1-\eta$ ヨリ大デアル。

備ヲ $y_{t_0} = Z_{t_0}$ デアルカラ

$$(7) \quad y_t - y_{t_0} = (Z_t - Z_{t_0}) + (y_t - Z_t)$$

今別ニ $2n$ 次元空間 R^{2n} ヲ考ヘ、ソノ點ヲ $(\zeta_1, \xi_1, \zeta_2, \xi_2, \cdots\cdots, \zeta_n, \xi_n)$ ニテアラハス、コレニ確率ヲ次ノ如ク入レル。

$$(8) \quad P'(d\zeta_1 d\xi_1 d\zeta_2 d\xi_2 \cdots\cdots d\zeta_n d\xi_n) = \prod_{i=1}^{n} F(d\zeta_i d\xi_i)$$

茲ニ F ハ條件附確率法則:

$$(9) \quad F_{(Z_t - Z_{t_0},\ y_t - Z_t)/Z_{t_0}}$$

ヲ表ハス。

$$(10) \quad (\zeta_1, \xi_1, \cdots\cdots \zeta_n, \xi_n) \longrightarrow \zeta_i \ (又ハ\ \xi_i)$$

ナル對應ヲ考ヘルトキハ確率ノ場（R^{2n}, P'）ノ上ノ確率變數デアッテ、之ヲ再ビ ζ_i（又ハ ξ_i）ニテ表ハスコトニスル。更ニ

(11) $\eta_i=\zeta_i+\xi_i,\quad \eta=\sum\eta_i,\quad \zeta=\sum\zeta_i,\quad \xi=\sum\xi_i$

ト定義スルト $\{\eta_i\}$ ハ互ニ独立ナ確率變數ノ組デアル。$\{\zeta_i\}$, $\{\xi_i\}$ モ亦同様。又 ζ_i, ξ_i, η_i ノ確率法則ハ夫々

$$F_{z_t-z_{t_0}/y_{t_0}}\ (\text{即チ } F_{z_t-z_{t_0}/z_{t_0}}),$$

$$F_{y_t-z_t/y_{t_0}},\quad F_{y_t-y_{t_0}/y_{t_0}}$$

ニ等シイ。故ニ n ヲ $\left[\frac{1}{t-t_0}\right]$ ニ等シクトレバ

(12) $$F^{*\left[\frac{1}{t-t_0}\right]}_{z_t-z_{t_0}/z_{t_0}}=F'_\zeta,\quad F^{*\left[\frac{1}{t-t_0}\right]}_{y_t-y_{t_0}/y_{t_0}}=F'_\eta$$

茲ニ F'_ζ, F'_η ハ ζ, η ノ確率法則ヲアラハス。故ニ (4) ニヨリ

(13) $\rho(F'_\zeta,\ DZ_{t_0})<\varepsilon$

又 $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_n$ ハ独立デアルカラ

(14) $$(\sigma(\xi))^2=\sum_{i=1}^{n}(\sigma(\xi_i))^2<\left[\frac{1}{t-t_0}\right](t-t_0)\varepsilon<\varepsilon$$

(15) $$|E(\xi)|\leqq\sum_{i=1}^{n}|E(\xi_i)|<\left[\frac{1}{t-t_0}\right](t-t_0)\varepsilon<\varepsilon$$

故ニ

$$E(\xi^2)=(E(\xi))^2+(\sigma(\xi))^2<\varepsilon+\varepsilon^2<2\varepsilon$$

$$(\varepsilon<1)$$

$$P(|\xi| > \varepsilon^{\frac{1}{4}}) < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

即チ $$P(|\eta - \zeta| > \varepsilon^{\frac{1}{4}}) < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

即チ $$d(\eta, \zeta) < \varepsilon^{\frac{1}{4}} + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} < 3\varepsilon^{\frac{1}{4}} \quad (6)$$

P. Levy[17] ニヨレバ

$$(16) \quad \rho(F'_\eta, F'_\zeta) < 3\sqrt{2}\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

(13) ト (16) トカラ

$$(17) \quad \rho(F'_\eta, DZ_{t_0}) < \varepsilon + 3\sqrt{2}\,\varepsilon^{\frac{1}{4}} < (3\sqrt{2}+1)\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

(12) ト (17) トカラ

$$(18) \quad \rho\left(F^{*\left(\frac{1}{t-t_0}\right)}_{y_t - y_{t_0}/y_{t_0}}, DZ_{t_0}\right) < (3\sqrt{2}+1)\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

即チ (18) 式ハ任意ノ ε, η ニ對シテ $|t-t_0| < \delta(\varepsilon, \eta)$ ナル限リ $1-\eta$ ヨリモ大キイ確率ヲ以テ成立スル。即チ

$$Dy_{t_0} = DZ_{t_0}$$

定理 2.2. $\{y_t\}$, $\{Z_t\}$ が次ノ條件ヲ滿ス simple markoff process トスル。

$$(19) \quad y_{t_0} = Z_{t_0}$$

$$(20) \quad d(y_t, Z_t) = o(t - t_0)$$ (o ハ t_0, y_{t_0} ニ關係シテヨイ)

而ラバ DZ_{t_0} が存在スルトキニハ、Dy_{t_0} モ亦存在シ、且ツ

$$Dy_{t_0} = DZ_{t_0}$$

注意 $d(y_t, Z_t) = \inf_{\alpha>0} \{P(|y_t - Z_t| > \alpha) + \alpha\}$

證明. (20) ノ假定ガアルカラ、$\delta(\varepsilon,\eta)$ ヲ充分小サクトレバ $|t-t_0|<\delta(\varepsilon,\eta)$ ナル限リ

$$P\{|y_t - z_t| > \varepsilon(t-t_0)\} < \varepsilon(t-t_0)$$

前定理ノ證明ト同ジ記号ヲ用フレバ

$$P(|\xi_i| > \varepsilon(t-t_0)) < \varepsilon(t-t_0) \quad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

$$P\left(|\xi| > \varepsilon\left[\frac{1}{t-t_0}\right](t-t_0)\right)$$

$$< \sum_{i=1}^{n} P(|\xi_i| > \varepsilon(t-t_0)) \quad \left(n=\left[\frac{1}{t-t_0}\right]\right)$$

$$< n\varepsilon(t-t_0) = \varepsilon(t-t_0)\left[\frac{1}{t-t_0}\right]$$

$$\therefore \; P(|\xi| > 2\varepsilon) < 2\varepsilon$$

故ニ以下前定理ノ證明ト全様ニシテ、本定理ノ結論ヲ得ル。

§3. Examples.

$\boxed{例1}$ $\{x_t\}$ ガ (temporally) homogeneous differential process ナラバ

$$DX_t = F_{x_1 - x_0} \ (\text{independent of } (t, x_t))$$

$\boxed{例2}$ $\{x_t\}$ ガ differential process デアッテ二時点 t, s 間ノ変動 $x_s - x_t$ ノ特性函數 $\varphi_{t,s}(z)$ ガ次ノ形ノ式ニヨッテ表ハサレルノハ屢々起ル。

$$\log \varphi_{t,s}(z) = \int_s^t \psi_\tau(z)\, d\tau$$

茲ニ $\psi_\tau(z) = i m_\tau z - \frac{\sigma_\tau^2}{2} z^2 + \left(\int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{\infty}\right)\left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right) n_\tau(du)$

$\psi_\tau(z)$ ガ z ヲ定メタトキ, t ニ関シテ連續デ、$z=0$ ノ或

ル近傍デ同程度連續トスル。而ラバ

$$\log \varphi_{D\cdot x_t}(z) = \psi_t(z) \quad (\text{independent of } x_t)$$

故ニ $\varphi_{D\cdot x_t}(z)$ ハ確率法則 $D\cdot x_t$ ノ特性函數デアル。

逆ニ $\psi_t(z)$ ヲ與ヘテ differential process ヲ作ルコトモ出来ル。

例3 $\{x_t\}$ ガ brownian motion トスル。即チ $\{x_t\}$ ハ moving discontinuity ヲモタナイ temporally homogeneous differential process デ、$x_1 - x_0$ ガ normal distribution ニ從フトスル。シカラバ 例1 ニヨリ

(1) $D\cdot x_t$ = normal distribution

以後簡單ノタメニ平均値ガ a, 標準偏差ガ b ノガウス分布ヲ $G(a, b)$ ニテアラハス。normal distribution ハ $G(0, 1)$ デ表ハスワケデアル。今

(2) $$y_t = (x_t - x_0)^2$$

ニヨッテ定メラレル $\{y_t\}$ ヲ考ヘルト

(3) $$y_t = (x_{t_0} - x_0)^2 + (x_t - x_{t_0})^2 + 2(x_{t_0} - x_0)(x_t - x_{t_0})$$

ナル故、y_t ハ simple markoff process ナルコトガ分ル。

(4) $$\begin{aligned} y_t &= y_{t_0} + (x_t - x_{t_0})^2 + 2(x_{t_0} - x_0)(x_t - x_{t_0}) \\ &= \{ y_{t_0} + (t - t_0) + 2(x_{t_0} - x_0)(x_t - x_{t_0}) \} \\ &\quad + \{ (x_t - x_{t_0})^2 - (t - t_0) \} \end{aligned}$$

最初ノ $\{\quad\}$ 内ヲ Z_t ニテ表ハセバ

(5) $y_{t_0} = z_{t_0}$

(6) $E\{y_t - z_t\} = E\{(x_t - x_{t_0})^2 - (t - t_0)\}$

$$= (t - t_0) - (t - t_0) = 0$$

(7) $(\sigma\{y_t - z_t\})^2 = E\{(y_t - z_t)^2\}$

$$= E\{(x_t - x_{t_0})^2\} - (t - t_0)^2$$

$$E\{(x_t - x_{t_0})^4\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^4}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2(t-t_0)}\right\} d\xi$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^4}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\} d\lambda\right)(t - t_0)^2$$

$$= 3(t - t_0)^2$$

故ニ

(8) $(\sigma\{y_t - z_t\})^2 = 2(t - t_0)^2 = o(t - t_0)$

一方 z_t ノ定義ニヨリ

$$F_{z_t - z_{t_0} / x_{t_0} - x_0} = G(t - t_0,\ 2|x_{t_0} - x_0|\sqrt{t - t_0})$$

右辺ハ $|x_{t_0} - x_0|$ ニノミ関係スルカラ

$$F_{z_t - z_{t_0} / (x_{t_0} - x_0)^2} = G(t - t_0,\ 2|x_{t_0} - x_0|\sqrt{t - t_0})$$

即チ $F_{z_t - z_{t_0} / z_{t_0}} = G(t - t_0,\ 2|x_{t_0} - x_0|\sqrt{t - t_0})$

$$\therefore\ Dz_{t_0} = G(1,\ 2\sqrt{z_{t_0}})$$

定理2.1ヲ用ヒテ上式及ビ(5)(6)(8)カラ

$$\therefore\ Dy_{t_0} = G(1,\ 2\sqrt{z_{t_0}})$$

II. Integration

§4. Definite Integral

x_t ハ $x_0=0$ ナル brownian motion トスル。(8)

b_t ハ x_{0t} (即チ $(x_\tau;\ 0\leqq\tau\leqq t)$)(9) ノ函数デ可動不連続点ガナイトスル。

今 Δ ヲ ($2n+1$ 個ノ実数ノ組 $t_0, t_1, \cdots\cdots, t_n, \tau_0, \tau_1, \cdots\cdots \tau_{n-1}$ デ次ノ條件ヲ満スモノトスル。

(1) $0=t_0\leqq t_1\leqq t_2\leqq\cdots\cdots\leqq t_n=1$

(2) $0\leqq\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_{n-1}\leqq 1$

(3) $\tau_i\leqq t_i\ (i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$

$$d(\Delta)=\max_{1\leqq i\leqq n}(t_i-\tau_{i-1})$$

ト定義スル。而ラバ勿論、明ラカニ

(4) $t_i-t_{i-1}\leqq d(\Delta)\ (i=1,2,\cdots\cdots n)$

今 $d(\Delta)<\delta$ ナルトキ

(5) $$y_\Delta=\sum_{i=1}^{n} b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

ヲ分点標 $(t_0, t_1, \cdots\cdots, t_n)$ ノ上ノ δ- sum ト呼ブコトニスル。

定理4.1 y_Δ ハ $d(\Delta)\to 0$ ノトキ、確率收斂スル。

証明. 今 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n$ ノ細分ヲ $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_m$ トシ $\{\sigma_i\}$ ヲ

(6) $\sigma_{i-1} = \tau_{k-1} \quad \text{if } (s_{i-1}, s_i) \subset (t_{k-1}, t_k)$

ニヨッテ定義スレバ

(7) $$\sum_{i=1}^{m} b_{\sigma_{i-1}}(x_{s_i} - x_{s_{i-1}})$$

モ亦 δ-sum デアッテ、然モ y_Δ ニ等シイ。コレヲ分点系 $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_m$ ノ上ノ y_Δ ノ細分表示ト呼ブコトニスル。

今二ツノ δ-sum y_Δ ト $y_{\Delta'}$ トガアルトキ、Δ ノ分点系ト Δ' ノ分点系トノ和集合ヲ分点系トスル細分表示ヲ考ヘルコトニヨリ y_Δ ト $y_{\Delta'}$ トヲ同一分点系上ノ δ-sum デ表ハスコトガ出来ル。

即チ

(8) $$y_\Delta = \sum_{i=1}^{n} b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

(9) $$y_{\Delta'} = \sum_{i=1}^{n} b_{\tau'_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

故ニ (10) $$y_\Delta - y_{\Delta'} = \sum (b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

b_t ハ可動不連續点ガナイカラ、ε, η ニ對シテ $\delta(\varepsilon, \eta)$ ヲ充分小サクトレバ

(11) $$P\Big(\bigcap_{|t-s|<\delta(\varepsilon,\eta)} (|b_t - b_s| < \varepsilon)\Big) > 1 - \eta$$

今 $d(\Delta)$, $d(\Delta')$ ヲ共ニ $\delta(\varepsilon, \eta)$ ヨリ小サクトリ、c_i ($i = 1, 2, \cdots\cdots n$) ヲ

(12) $|b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}}| < \varepsilon$ ナラバ $c_i = b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}}$

$$|b_{\tau_{i-1}} - b_{\tau'_{i-1}}| \geqq \varepsilon \text{ ナラバ } C_i = 0$$

ト定義スレバ (11) ニヨリ

$$(13) \quad P(y_\Delta - y_{\Delta'} \neq \sum_i C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) < \eta$$

且ツ C_i ハ明ラカニ $x_{ot_{i-1}}$ ノ函数デアル。故ニ C_i ト $x_{t_i} - x_{t_{i-1}}$ トハ独立デアル。

又

$$(14) \quad E\left\{\left(\sum_i C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right)^2\right\}$$

$$= \sum_i E\left\{C_i^2 (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\right\} + 2\sum_{i<j} E\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})(x_{t_j} - x_{t_{j-1}})\}$$

$$= \sum_i E(C_i^2) E\left\{(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\right\}$$

$$+ 2\sum_{i<j} E\{C_i C_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\} \underbrace{E\{x_{t_j} - x_{t_{j-1}}\}}_{=0} {}^{(10)}$$

$$\leqq \sum_i \varepsilon^2 (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon^2$$

故ニ

$$(15) \quad P\left\{\left|\sum_i C_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right| > \sqrt{\varepsilon}\right\} < \varepsilon$$

(13) ト (15) トカラ

$$P\{|y_\Delta - y_{\Delta'}| > \sqrt{\varepsilon}\} < \varepsilon + \eta \qquad \boxed{q.e.d.}$$

(註) 上ノ端点ハ $0, 1$ ニ限ラズ t, s デモヨイ。

定義 4.1　定理4.1デソノ存在が証明セラレタ y_Δ ノ極限値ヲ $\int_0^1 b_\tau dx_\tau$ ニテ表ハシ、b_t ノ x_t ニ関スル積分ト呼ブコトニスル。$\int_t^s b_\tau dx_\tau$ モ同様ニ理解スル。

§5. 積分ニ関スル諸定理

本節ヲ通ジテ $\{x_t\}$ ハ brownian motion デ被積分函数（b_t, c_t 等）ハ x_{0t} ノ函数デ且ツ可動不連續点ヲモタナイモノト假定スル。

前節ニ定義シタ積分ハ、普通ノ積分ト同様ニ次ノ諸定理ヲ満足スル。

定理5.1 $$\int_t^s dx_\tau = x_s - x_t$$

定理5.2 $$\int_t^s (\lambda b_\tau + \mu c_\tau)\, dx_\tau = \lambda \int_t^s b_\tau dx_\tau + \mu \int_t^s c_\tau dx_\tau$$

定理5.3. $t < s < u$ ノ時ニハ

$$\int_t^s b_\tau dx_\tau + \int_s^u b_\tau dx_\tau = \int_t^u b_\tau dx_\tau$$

定理5.4 $y = \int_t^s b_\tau dx_\tau$ ニ於テ

(1) $E(b_\tau^2) \leqq M(\tau)$

ナル連續函數 $M(\tau)$ ガアレバ

(2) $E(y^2) \leqq \int_t^s M(\tau)\, d\tau$

定理5.5 確率過程ノ列 $\{b_\tau^{(n)}\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ガ strong topology ノ意味デ $\{b_\tau\}$ ニ確率收斂スル。

即チ

$$P\{\sup_{s \leqq \tau \leqq t} |b_\tau^{(n)} - b_\tau| > \varepsilon\} \to 0 \quad (n \to \infty \text{ ノ時})$$

ナラバ $\int_t^s b_\tau^{(n)} dx_\tau$ ハ $\int_t^s b_\tau dx_\tau$ ニ確率收斂スル。

定理5.1, 5.2, 5.3ハ明ラカ。定理5.4及ビ定理5.5ヲ證明スルタメニ 先ヅ補助定理ヲ證明スル。

Lemma 5.1. $x, x_1, x_2, \cdots\cdots$ ヲ実確率変数トスル。

(4) $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ハ x ニ確率1ヲ以テ收斂スル。

(5) $x_1, x_2, \cdots\cdots \geqq 0$

(6) $E(x_n) \leqq e_n \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$

(7) $e_n \longrightarrow e$

ナラバ

(8) $E(x) \leqq e$

證明 $\inf(x_n, x_{n+1}, \cdots\cdots) = y_n$

トスレバ

(9) $0 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots\cdots \longrightarrow x$

(10) $0 \leqq E(y_n) \leqq E(x_n) \leqq e_n \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$

(9)ニヨリ $\{y_n\}$ ハ単調列デアルカラ

$$E(x) = E(\lim y_n) = \lim E(y_n)$$

一方(10)ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} E(y_n) \leqq \overline{\lim}\, e_n = \lim e_n = e$$

故ニ $E(x) \leqq e$

定理5.4ノ證明

$d(\Delta_n) \longrightarrow 0$ ナル $\{\Delta_n\}$ ヲ適當ニトッテ，確率1ヲ以テ

$$(11) \quad y=\int_t^s b_\tau \, dx_\tau=\lim_{n\to\infty}\sum_{\Delta_n} b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

が成立スルヤウニ出来ル。(11)

故ニ

$$y^2=\left(\int_t^s b_\tau \, dx_\tau\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\Delta_n} b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\right)^2$$

$\sum_{\Delta_n} b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$ ヲ y_n ニテ表ハセバ

$$E(y_n^2)=\sum_i E(b_{\tau_{i-1}}^2)E((x_{t_i}-x_{t_{i-1}})^2)$$

$$+2\sum_{i<j} E\left(b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})b_{\tau_{j-1}}\right)^{(11)} \underbrace{E(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$$\therefore \quad E(y_n^2)\leqq\sum_{\Delta_n} M(\tau_{i-1})(t_i-t_{i-1})$$

右辺ハ $n\to\infty$ ノ時 $\int_t^s M(\tau)\,d\tau$ ニ近ヅク。故ニ Lemma 5.1 ニヨリ $E(y^2)\leqq\int_t^s M(\tau)\,d\tau$

定理5.5ノ証明

ε, η ニ對シテ n ヲ充分大キクトレバ、確率収斂ノ假定ニヨリ

$$(12) \quad P\left\{\sup_{t\leqq\tau\leqq s}\left|b_\tau^{(n)}-b_\tau\right|\geqq\varepsilon\right\}<\eta$$

備テ C_τ ヲ次ノ如ク定義スル。

$b_\tau^{(n)}-b_\tau>\varepsilon$ ナラバ $C_\tau=\varepsilon$

$$-\varepsilon \leqq b_\tau^{(n)} - b_\tau \leqq \varepsilon \quad \text{ナラバ} \quad C_\tau = b_\tau^{(n)} - b_\tau$$

$$b_\tau^{(n)} - b_\tau < -\varepsilon \quad \text{ナラバ} \quad C_\tau = -\varepsilon$$

然ラバ C_τ ハ $x_{0\tau}$ ノ函数デ、確率過程 $\{C_\tau\}$ ハ可動不連續点ヲモタナイ。從ッテ $\int_s^t C_\tau dx_\tau$ ヲ考ヘルコトが出来ル。

(12) ニヨレバ

$$(13) \quad P\left\{\int_t^s C_\tau dx_\tau \neq \int_t^s (b_\tau^{(n)} - b_\tau) dx_\tau\right\} < \eta$$

且ツ $|C_\tau| \leqq \varepsilon \qquad \therefore \quad E(C_\tau^2) \leqq \varepsilon^2$

$$\therefore \quad E\left\{\left(\int_t^s C_\tau dx_\tau\right)^2\right\} \leqq \varepsilon^2 (s-t)$$

$$(14) \quad P\left\{\left|\int_t^s C_\tau dx_\tau\right| > \sqrt{\varepsilon}\right\} \leqq \varepsilon (s-t)$$

(13), (14) ニヨリ

$$P\left\{\left|\int_t^s b_\tau^{(n)} dx_\tau - \int_t^s b_\tau dx_\tau\right| > \sqrt{\varepsilon}\right\} \leqq \varepsilon (s-t) + \eta$$

故ニ $\int_t^s b_i^{(n)} dx_\tau$ ハ $\int_t^s b_\tau dx_\tau$ ニ確率收斂スル。

§6. Indefinite integral

$\{b_\tau\}$ $\{x_\tau\}$ ハ §4 ニ於テ述ベタ通リトスル。

定理6.1 $\left\{\int_0^t b_\tau dx_\tau\right\}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ ハ可動不連續点ヲモタナイ。

即チ"(01) 上ノ連續函数"ヲ値トスル確率函数 y が存

在シテ任意ノ t ($0 \leqq t \leqq 1$) ニ對シテ

$$P\left\{\int_0^t b_\tau dx_\tau = y_t\right\} = 1 \qquad \left(\begin{array}{l} y_t \text{ハ} y \text{ノ} t \text{ニ對スル} \\ \text{値ヲ示ス実確率変数} \end{array}\right)$$

ヲ滿足スル。(カヽル y ガ equivalence ヲ除イテ一義的ニ定マルコトハ"序(II)"ノ所デ述ベタ。)

定義6.1. 定理6.1ニ於ケル y ヲ b_τ ノ x_τ ニ関スル不定積分トイフ。

定理6.1ノ証明

$$(1)\quad y_\Delta(t) = \sum_{i=1}^{k-1} b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) + b_{\tau_{k-1}}(x_t - x_{k-1})$$

$$\text{if} \quad t \in (t_{k-1}, t_k)$$

ナル $\{y_\Delta(t)\}$ ハ明ラカニ可動不連續点ガナイ。

故ニ $y_\Delta(t)$ 連續函數ヲ値トスル確率変數——コレヲ再ビ y_Δ ニテ記ス。——ノ t ニ於ケル値ト考ヘルコトが出来ル。而ラバ $y_\Delta = (y_\Delta(t);\ 0 \leqq t \leqq 1)$ ガ $d(\Delta) \to 0$ ノトキ、strong topology ニ関シテ確率收斂スルコトヲ証明スレバヨイ。

而ラバ $\{y_{\Delta_n}\}$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ガ strong topology ニ関シテ、確率1ヲ以テ收斂スルヤウニ $\{\Delta_n\}$ ヲ選ブコトガ出来ル。コノ極限ヲ y トスレバ y ハ確率1ヲ以テ、連續函數列 $\{y_{\Delta_n}\}$ ノ一様收斂ノ極限値デアッテ、即チ確率1ヲ以テ連續函數デアル。

先ヅ Lemma ヲ証明スル。

Lemma 6.1

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ が互ニ独立ナ実確率変数デ y_i ($i=1,2,\cdots\cdots n$) ハ ($x_i, x_{i+1}, \cdots\cdots, x_n$) ト独立ナル実確率変数トスル。

(2) $E(x_i)=0$, $E(y_i^2)<\infty$, ($i=1,2,\cdots\cdots n$)

ナラバ

(3) $$P\left\{\max_{1\leqq k\leqq n}\left|y_1x_1+y_2x_2+\cdots\cdots+y_kx_k\right|\geqq l\right\}$$

$$\leqq\frac{E\left\{(y_1x_1+y_2x_2+\cdots\cdots+y_nx_n)^2\right\}}{l^2}$$

此ノ Lemma ハ Kolmogoroff ノ不等式 ($y_1=y_2=\cdots\cdots=y_n=1$ ノ場合) ノ擴張デアッテ、ソノ証明ハ全ク同様デアルカラ省略スル。

偖テモトニモドリ、$S_1, S_2, \cdots\cdots$ ヲ $(0,1)$ ノ上デ到ル所稠密ナル点列トシ、Δ', Δ ノ分点ニ $S_1, S_2, \cdots\cdots S_m$ ヲ附加シテ得ラレル分点ヲ再ビ $0=t_0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n=1$ ニテ表ハセバ

(4) $$y_\Delta(t_k)=\sum_{i=1}^{k}b_{\tau_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

(5) $$y_{\Delta'}(t_k)=\sum_{i=1}^{k}b_{\tau'_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

$d(\Delta)$, $d(\Delta')<\delta(\varepsilon,\eta)$ ナルヤウニトル。—— $\delta(\varepsilon,\eta)$ ハ §4 (11) 式ノ所デ述ベタ —— 而ラバ (4) (5) ノ右辺ハ

何レモ $\delta(\varepsilon,\eta)$-sum トナル.

$$(6)\quad y_\Delta(t_k)-y_{\Delta'}(t_k)=\sum_{i=1}^{k}(b_{\tau_{i-1}}-b_{\tau'_{i-1}})(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

C_i ヲ §4 (12) 式ニ於ケル如ク定義スルト

$$(7)\quad P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\left(y_\Delta(t_k)-y_{\Delta'}(t_k)\neq\sum_{i=1}^{k}c_i(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\right)\right\}<\eta$$

備テ

$$(8)\quad E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\right)^2\right\}<\varepsilon^2$$

Lemma 6.1 デ y_i ノ代リニ C_i, x_i ノ代リニ $(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$, l ノ代リニ $\sqrt{\varepsilon}$ ヲトレバ

$$(9)\quad P\left\{\max_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}c_i(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\right|\geqq\sqrt{\varepsilon}\right\}\leqq\varepsilon$$

(7)(9) ヨリ

$$(10)\quad P\left\{\max_{1\leqq k\leqq n}\left|y_\Delta(t_k)-y_{\Delta'}(t_k)\right|\geqq\sqrt{\varepsilon}\right\}\leqq\varepsilon+\eta$$

即チ勿論

$$(11)\quad P\left\{\max_{1\leqq i\leqq m}\left|y_\Delta(s_i)-y_{\Delta'}(s_i)\right|\geqq\sqrt{\varepsilon}\right\}\leqq\varepsilon+\eta$$

左辺ノ $P\{\quad\}$ ノ中ハ m ト共ニ増大シテ

$$\left(\sup_{k=1}^{\infty}\left|y_\Delta(s_k)-y_{\Delta'}(s_k)\right|\geqq\sqrt{\varepsilon}\right)$$

ニ近ヅク. $y_\Delta(\tau)$, $y_{\Delta'}(\tau)$ モ共ニ τ ノ連續函數デ $\{s_i\}$ ガ

(0,1) ノ上デ到ル所稠密ナル故

$$\sup_{k=1}^{\infty}\left|y_\Delta(s_k)-y_{\Delta'}(s_k)\right|=\sup_{0\leqq \tau\leqq 1}\left|y_\Delta(\tau)-y_{\Delta'}(\tau)\right|$$

$$\therefore\quad P\left\{\sup_{0\leqq \tau\leqq 1}\left|y_\Delta(\tau)-y_{\Delta'}(\tau)\right|\geqq\sqrt{\varepsilon}\right\}\leqq\varepsilon+\eta\qquad q.e.d.$$

§7. 不定積分ノ例

例 1. $$\int_0^t x_\tau\,dx_\tau=\frac{1}{2}x_t^2-\frac{1}{2}t$$

例 2. $$\int_0^t x_\tau^2\,dx_\tau=\frac{1}{3}x_t^3-\int_0^s x_\tau\,d\tau$$

例 3. $$\int_0^t a(x_\tau)\,dx_\tau=\int_0^{x_t}a(\lambda)\,d\lambda-\int_0^t\frac{a'(x_\tau)}{2}dt$$

但シ $a'(\lambda)$ ハ λ ノ連續函數トスル。

例 1，例 2 ハ例 3 ノ特別ノ場合故、例 3 ノミヲ證明スル。

先ヅ $b(\xi)$ ヲ

(1) $$b(\xi)=\int_0^\xi a(\lambda)$$

ニヨッテ定義スル。

$\{x_\tau\}$ ハ可動不連續點ガナイ process デアルカラ、(01) デ有界デアル確率ガ 1 デアル。（ハシガキ（II.）參照）故ニ η ニ對シテ M ヲ充分大キクトレバ

(2) $$P\left\{\sup_{0\leqq \tau\leqq 1}|x_\tau|<M\right\}>1-\eta$$

次ニ$a'(\xi)$ハ連續ナル故$|\xi|\leqq M$デハ一樣連續δヲεニ對シテ充分小サクトレバ

(3) $|\xi'-\xi|<\delta$ ナル限リ $|a'(\xi')-a'(\xi)|<\varepsilon$

又x_tガ連續デアル確率ガ1デアルカラγヲδニ對シテ充分小サクトレバ

$$(4)\quad P\Big(\bigcap_{\substack{|t-s|<\gamma\\ 0\leqq t,s\leqq 1}}(|x_t-x_s|<\delta)\Big)>1-\eta$$

$$\Omega'=\Big(\bigcap_{|t-s|<\gamma}(|x_t-x_s|<\delta)\Big)\cdot\Big(\sup_{0\leqq t\leqq 1}|x_t|<M\Big)$$

トスレバ(2)(4)カラ

$$(4')\quad P(\Omega')>1-2\eta$$

楯テ$a'(\lambda)$ガ連續ナル故$b(\xi)$ハ二次ノ微係數マデ連續デアル。

故ニ

$$(5)\quad b(\xi')-b(\xi)$$

$$=b'(\xi)(\xi'-\xi)+\frac{b''(\xi)}{2}(\xi'-\xi)^2+\frac{b''(\xi+\theta(\xi'-\xi))-b''(\xi)}{2}(\xi'-\xi)^2$$

$$=a(\xi)(\xi'-\xi)+\frac{a'(\xi)}{2}(\xi'-\xi)^2+\frac{a'(\xi+\theta(\xi'-\xi))-a'(\xi)}{2}(\xi'-\xi)^2$$

玆ニ$0\leqq\theta\leqq 1$デアル。

故ニ (6) $b(x_s)-b(x_t)$

$$=a(x_t)(x_s-x_t)+\frac{a'(x_t)}{2}(x_s-x_t)^2+\frac{a'(x_t+\theta(x_s-x_t))-a'(x_t)}{2}(x_s-x_t)^2$$

Ω' ノ上デハ $|t-s|<\gamma$ ナル限リ

$$|x_t+\theta(x_s-x_t)| \leqq \max(|x_t|, |x_s|) < M$$

又 $|x_t+\theta(x_s-x_t)-x_t| \leqq |x_s-x_t| < \delta$

従ッテ (5) ニヨリ

$$(7) \quad |a'(x_t+\theta(x_s-x_t)) - a'(x_t)| \leqq \varepsilon$$

備テ、(7) ガ成立シタ場合ニハ

$$(8) \quad C_{t,s} \equiv \frac{1}{2}a'(x_t+\theta(x_s-x_t)) - a'(x_t)$$

ト定義シ, 然ラザレバ

$$(9) \quad C_{t,s} \equiv 0$$

ト定義スル。又 $a'(\xi)$ ハ ξ ノ連續函數ナル故 $|\xi| \leqq M$ デ $a'(\xi)$ ハ有界.

$\sup_{|\xi| \leqq M} |a'(\xi)| = R$ トスル。備テ e_t ヲ

$$(10) \quad |a'(x_t)| \leqq R \quad \text{ナラバ} \quad e_t = a'(x_t)$$

然ラザレバ $\quad e_t = 0$

ト定義スル。Ω' ノ上デハ (8) 及ビ $e_t = a'(x_t)$ ガ成立スルカラ (6) ニヨリ Ω' ノ上デハ $|t-s|<\gamma$ ナル限リ

$$(10) \quad b(x_s) - b(x_t)$$
$$= a(x_t)(x_s-x_t) + \frac{a'(x_t)}{2}(s-t) + C_{t,s}(x_s-x_t)^2$$
$$+ \frac{1}{2}e_t\left((x_s-x_t)^2-(s-t)\right)$$

今 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n = t$ ナル点 $t_0, t_1, \cdots\cdots, t_n$ ヲトリ

$$|t_i - t_{i-1}| \qquad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

ヲ何レモγヨリ小サクトレバ，Ω'ノ上デハ

$$(11)\quad b(x_t) - b(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(b(x_{t_i}) - b(x_{t_{i-1}}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a'(x_{t_{i-1}})}{2}(t_i - t_{i-1})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_{t_{i-1} t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e_{t_{i-1}} \left((x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right)$$

$|t_i - t_{i-1}|$ヲ何レモ充分小サク（例ヘバβヨリ小サク）トレバ

$$(12)\quad P\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} a(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) - \int_0^t a(x_\tau)\,dx_\tau \right| > \varepsilon \right\} < \eta$$

$$(13)\quad P\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{a'(x_{t_{i-1}})}{2}(t_i - t_{i-1}) - \int_0^t \frac{a'(x_\tau)}{2}\,d\tau \right| > \varepsilon \right\} < \eta$$

$$E\left(\left| \sum_{i=1}^{n} c_{t_{i-1} t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 \right| \right)$$

$$\leqq E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2 \right) \leqq \varepsilon^2 \cdot t \leqq \varepsilon^2$$

$$(14)\quad P\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} c_{t_{i-1} t_i} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right| > \sqrt{\varepsilon} \right\} < \varepsilon$$

又$|t_i - t_{i-1}|$ヲ何レモ$\frac{\varepsilon}{R^2}$ヨリ小サクトレバ

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e_{t_{i-1}}}{2}\left((x_{t_i}-x_{t_{i-1}})^2-(t_i-t_{i-1})\right)\right)^2\right\}\leqq\sum_{i=1}^{n}\frac{R^2}{4}\left(2(t_i-t_{i-1})^2\right)$$

$$\leqq\frac{R^2}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{R^2}\cdot 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\leqq\frac{\varepsilon}{2}\cdot t\leqq\frac{\varepsilon}{2}$$

$$(15)\quad P\left\{\left|\sum_{i=1}\frac{e_{t_{i-1}}}{2}\left((x_{t_i}-x_{t_{i-1}})^2-(t_i-t_{i-1})\right)\right|>\sqrt[4]{\varepsilon}\right\}\leqq\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

(4′) (11) (12) (13) (14) (15) ニヨリ

$$P\left\{\left|\int_0^{x_t}a(\lambda)\,d\lambda-\int_0^t a(x_\tau)\,dx_\tau-\int_0^t\frac{a'(x_\tau)}{2}\,d\tau\right|>2\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}+\sqrt[4]{\varepsilon}\right\}$$
$$<2\eta+2\eta+\varepsilon+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

ε, ηハ任意デアルカラtノ各値ニ對シテ

$$\int_0^{x_t}a(\lambda)\,d\lambda=\int_0^t a(x_\tau)\,dx_\tau+\int_0^t\frac{a'(x_\tau)}{2}\,d\tau$$

即チ

$$(16)\quad\int_0^t a(x_\tau)\,dx_\tau=\int_0^{x_t}a(\lambda)\,d\lambda-\int_0^t\frac{a'(x_\tau)}{2}\,d\tau$$

ガ確率1ヲ以テ成立スル。tヲ動カシテ考ヘルトキ(16)ノ両辺ハ共ニ可動不連続点ナキ確率過程デアルカラ、(16)ハスベテtニ對シテ成立スルト考ヘテモヨイ。

例4. $a(\tau)$, $b(\tau)$ガ連續函數デアリ、x_τガ brownian motion トスル時

$$y_t=\int_0^t a(\tau)\,d\tau+\int_0^t b(\tau)\,dx_\tau$$

ハ differential process デ、y_s-y_t ハ $G\left(\int_t^s a(\tau)\,d\tau,\sqrt{\int_t^s (b(\tau))^2 d\tau}\right)$ ニ從フ。茲ニ $G(\alpha,\beta)$ ハ α ヲ平均値トシ、β ヲ標準偏差トスル Gauss 分布ヲ表ハス。

證明. differential process ナルコトハ明ラカ。$\{\Delta_n\}$ ヲ適當ニトレバ

$$y_s-y_t=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_s^t a(\tau)\,d\tau+\sum_{\Delta_n} b(\tau_{i-1})(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\right\}$$

右辺ノ lim ノ次ノ $\{\quad\}$ 内ハ Gauss 分布ニ從ヒ

$$\text{ソノ平均値}=\int_s^t a(\tau)\,d\tau$$

$$\text{ソノ標準偏差}=\sqrt{\sum_{\Delta_n}(b(\tau_{i-1}))^2(t_i-t_{i-1})}\to\sqrt{\int_t^s (b(\tau))^2 d\tau}$$

$\boxed{\text{Q. E. D.}}$

§8. 不定積分ノ絶對値ニ關スルーツノ不等式

定理8.1. $\{x_t\}\ \{b_t\}$ ハ §4 デ定義シタ通リトスル。且ツ $E(b_t^2)$ ガ t ニ關シテ連續トスル。

而ラバ

(1) $$P\left\{\sup_{0\leqq t\leqq 1}\left|\int_0^t b_\tau\,dx_\tau\right|\geqq l\right\}\leqq\frac{\int_0^t E(b_\tau^2)\,d\tau}{l^2}$$

(註) コノ定理ハ Lemma 6.1 ニ於テ、和ノ代リニ積分ヲ

以テ置キ換ヘタモノトスル。

証明　定理6.1ノ証明ニ於ケル(1)式デ與ヘタ $y_\Delta(t)$ ヲ考ヘル。$d(\Delta_n)\to 0$ ナル $\{\Delta_n\}$ ヲ適當ニトレバ $y_{\Delta_n}(t)$（コレヲ單ニ $y_n(t)$ ト記ス）が $\int_0^t b_\tau dx_\tau$ ニ一様ニ收斂スル確率が1ナルヤウニ出来ル。

今 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ ヲ $(0,1)$ 上デ到ル所稠密ナ点列トスル。今 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_k$ ヲ Δ_m ノ分点ニ加ヘテ得ラレル分点系 $0=s_0<s_1<s_2<\cdots\cdots<s_n=1$ ノ上デ y_m ノ細分表示ヲ行フト

$$y_m(s_j)=\sum_{i=1}^{j} b_{\sigma_{i-1}}(x_{s_i}-x_{s_{i-1}})$$

ナル表現が得ラレル。

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{\sigma_{i-1}}(x_{s_i}-x_{s_{i-1}})\right)^2\right\}\leqq\sum_{i=1}^{n}E(b^2_{\sigma_{i-1}})(s_i-s_{i-1})$$

$$=\sum_{\Delta_m}E(b^2_{\tau_{i-1}})(t_i-t_{i-1})$$

Lemma 6.1ヲ用ヒテ

$$P\left\{\max_{1\leqq j\leqq n}|y_m(s_j)|\geqq l\right\}\leqq\frac{1}{l^2}\sum_{\Delta_m}E(b^2_{\tau_{i-1}})(t_i-t_{i-1})$$

從ッテ勿論

$$P\left\{\max_{1\leqq i\leqq k}|y_m(\alpha_k)|\geqq l\right\}\leqq\frac{1}{l^2}\sum_{\Delta_m}E(b^2_{\tau_{i-1}})(t_i-t_{i-1})$$

$k\longrightarrow\infty$ トスレバ（$y_m(\tau)$ が可動不連續点ヲ持タナイ事ニ

注意シテ)

$$P\left\{\sup_{0\leqq t\leqq 1}|y_m(t)|\geqq l\right\}\leqq\frac{1}{l^2}\sum_{\Delta_m}E(b^2_{t_{i-1}})(t_i-t_{i-1})$$

$m\to\infty$ トスレバ

$$P\left\{\sup_{0\leqq t\leqq 1}\left|\int_0^t b_\tau\,dx_\tau\right|\geqq l\right\}\leqq\frac{1}{l^2}\int_0^1 E(b^2_\tau)\,d\tau$$

III. 微分方程式ト積分方程式

§9. 本章デハ、微分方程式

(1) $\mathcal{D}y_t=G(a(t,y_t),\ b(t,y_t))$

ヲ

(2) $y_0=C$

ナル初期條件ノ下ニ解クコトヲ目的トスル　$\mathcal{D}=G(\alpha,\beta)$ ハ平均値α, 標準偏差βナル Gauss 分布ヲ表ハス.

先ヅ定理ヲ掲ゲル。

定理8.1. $0\leqq t\leqq 1$, $-\infty<y<\infty$ ナルトキ $a(t,y)$, $b(t,y)$ が何レモ t, yニ關シテ連續デ、且ツ

(3) $|a(t,y)-a(t,y')|\leqq A|y-y'|$

$|b(t,y)-b(t,y')|\leqq B|y-y'|$

ヲ満スヤウナ常數A, B が存在スルトスル. 然ラバ x_t ヲ brownian motion トスルトキ

(4) $y_t=C+\int_0^t a(\tau,y_\tau)\,d\tau+\int_0^t b(\tau,y_\tau)\,dx_\tau$

ハ一ツ而シテ唯一ツノ解ヲ有シ、ソノ解ハ(1)ヲ満足スル。

§10. 上ノ積分方程式ノ解ノ存在証明(逐次近似法!)

Lemma 10.1. $\{a_t\}$ が可動不連續点ナキ *stochastic process* デ $E(a_t^2) \leqq M(t)$ ナル連續函數 $M(t)$ が存在スルトスル。

而ラバ

$$(1)\quad E\left\{\left(\int_t^s a_\tau d\tau\right)^2\right\} \leqq (s-t)\int_t^s M(\tau)\, d\tau$$

証明

$$(2)\quad \left(\int_t^s a_\tau d\tau\right)^2 \leqq (s-t)\int_t^s a_\tau^2\, d\tau$$

$$E\left\{\left(\int_t^s a_\tau d\tau\right)^2\right\} \leqq (s-t)\, E\left\{\int_t^s a_\tau^2\, d\tau\right\} \leqq (s-t)\int_t^s M(\tau)\, d\tau$$

最後ノ不等式ハ *Lemma* 5.1 ヲ用ヒテ証明スルコトが出來ル。

備テモトニ戻リ、$y_t^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ順々ニ次ノ関係式デ定義スル。

$$(3)\quad y_t^{(0)} = c$$

$$(4)\quad y_t^{(k)} = c + \int_0^t a(\tau, y_\tau^{(k-1)})\, d\tau + \int_0^t b(\tau, y_\tau^{(k-1)})\, dx_\tau$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots)$$

先ヅ $y_t^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ が任意ノ定マッタ t $(0 \leqq t \leqq 1)$

ニ對シテ平均收斂[13]スルコトヲ証明スル。

$$(5)\quad y_t^{(1)}-y_t^{(0)}=\int_0^t a(\tau,c)\,d\tau+\int_0^t b(\tau,c)\,dx_\tau$$

$a(\tau,c)$, $b(\tau,c)$ ハ τ ノ連續函數デアルカラ、ソノ絶對値ハ閉區間 $0\leqq\tau\leqq1$ ニ於テアル有限値Mニテ上カラ抑ヘルコトガ出來ル。

即チ

$$(6)\quad |a(\tau,c)|\leqq M\qquad |b(\tau,c)|\leqq M\qquad (0\leqq\tau\leqq1)$$

故ニ Lemma 10.1 ニヨリ、上ノ始メノ式カラ

$$(7)\quad E\left\{\left(\int_0^t a(\tau,c)\,d\tau\right)^2\right\}\leqq t\int_0^t M^2\,d\tau\leqq M^2t^2\leqq M^2t$$

$$(0\leqq t\leqq1)$$

又定理5.4ヲ用ヒテ、(6)ノ後ノ式カラ

$$(8)\quad E\left\{\left(\int_0^t b(\tau,c)\,dx_\tau\right)^2\right\}\leqq\int_0^t M^2\,d\tau=M^2\cdot t$$

(5), (7), (8) ヨリ

$$(9)\quad E\{(x+y)^2\}\leqq\left(\sqrt{E(x^2)}+\sqrt{E(y^2)}\right)^2 \;[14]$$

ヲ用ヒテ

$$(10)\quad E\left\{\left(y_t^{(1)}-y_t^{(0)}\right)^2\right\}\leqq4M^2\cdot t$$

隋テ一般ニ

$$(7)\quad E\left\{\left(\int_0^t \left(a(\tau,y_\tau^{(n)})-a(\tau,y_\tau^{(n-1)})\right)d\tau\right)^2\right\}$$

$$\leqq 4M^2R^{2(n-1)}\frac{t^{n+1}}{\underline{|n+1}}A^2$$

(8') $$E\left\{\left(\int_0^t a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)})\, dx_\tau\right)^2\right\}$$

$$\leqq 4M^2R^{2(n-1)}\frac{t^{n+1}}{\underline{|n+1}}B^2$$

(10') $$E\left\{\left(y_t^{(n+1)} \quad y_t^{(n)}\right)^2\right\} \leqq 4M^2R^{2n}\frac{t^{n+1}}{\underline{|n+1}} \quad (但シ R \equiv A+B)$$

ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。

$a(\tau, y_t^{(-1)}) = 0$, $b(\tau, y_t^{(-1)}) = 0$ ト定メレバ (7') (8') (10') ハ (7), (8), (10) ニヨリ $n=0$ ノ時ニ成立スル。一般ノ場合ノ証明ハ帰納法ニヨル。

即チ $n-1$ ニ対シテ (7') (8') (10') ガ成立スルトシ、§9 (3) 式ニヨリ

$$|a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)})| \leqq A|y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)}|$$

$$E\{(a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)}))^2\} \leqq A^2 E\{(y_\tau^{(n)} - y_\tau^{(n-1)})^2\}$$

$$\leqq 4M^2R^{2(n-1)}\frac{t^n}{\underline{|n}}A^2$$

Lemma 10.1 ニヨリ ($0 \leqq t \leqq 1$ ナルコトニ注意スレバ)

$$E\left\{\left(\int_0^t (a(\tau, y_\tau^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)}))\, d\tau\right)^2\right\}$$

$$\leqq \int_0^t 4M^2R^{2(n-1)}\frac{\tau^n}{\underline{|n}}A^2\, d\tau = 4M^2R^{2(n-1)}\frac{t^{n+1}}{\underline{|n+1}}A^2$$

即チ(7')ガ n ノ場合ニ成立スルコトガ示サレタ．同様ノ方法デ(8')モ亦成立スルコトガ示サレル．コノ際Lemma 10.1ノ代リニ定理5.4ガ用ヒラレル．(7')(8')及ビ次ノ(＊)カラ不等式(9)ヲ用ヒテ(10')ヲ導クコトガ出来ル。

(＊) $y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}$

$$= \int_0^t \left(a(\tau, y^{(n)}) - a(\tau, y_\tau^{(n-1)})\right) d\tau + \int_0^t \left(b(\tau, y^{(n)}) - b(\tau, y_\tau^{(n-1)})\right) dx_\tau$$

サテ(10')ニヨリ

$$\rho_m(y_t^{(n+1)}, y_t^{(n)}) \leqq \sqrt{4M^2R^{2n}\frac{t^{n+1}}{\lfloor n+1}} \qquad \left(\rho_m(x,y) \equiv \sqrt{E((x-y)^2)}\right) \tag{15}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4M^2R^{2n}\frac{t^{n+1}}{\lfloor n+1}} < \infty$ ナル故 変数列:

$$(11) \quad y_t^{(n)} = y_t^{(0)} + (y_t^{(1)} - y_t^{(0)}) + \cdots\cdots + (y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)})$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

ハ平均収斂スル。ソノ極限値ヲ y_t トスレバ $E(y_t^2) < \infty$ デアッテ、y_t ノ平均値、標準偏差ハイヅレモ有限確定値ヲトル。

次ニ $\{y_t\}$ ガ可動不連続点ヲ持タナイ process ナルコトヲ証明スル．$\{y_t^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ定理6.1ニヨリ何レモ可動不連続点ヲモタナイカラ stochastic process ノ列 $\{y_t^{(n)}\}$ ガ strong topology ニ関シテ確率収斂スルコトヲ証明スレバヨイ．（定理6.1ノ証明ノ所デ同様ナコトヲ

述ベテキルカラ参照セラレタイ)

先ヅ(8')ニ於テ $t=1$ トオキ、定理8.1ヲ用フレバ

$$(12)\quad P\left\{\sup_{0\leqq \tau\leqq 1}\left|\int_0^t (b(\tau,y_\tau^{(n)})-b(\tau,y^{n-1}))dx_\tau\right|>\left(\frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

$$\leqq 4M^2R^{2(n-1)}\frac{1}{\lfloor n+1}B^2\cdot 2^{2n}\quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

(12)式ノ右辺ヲ項トスル級数ハ収斂スルカラ、Borel-Cantelli ノ定理ニヨリ、次ノコトガ確率1ヲ以テ成立スル。

"充分大キイ n ニ對シテハ

$$(13)\quad \sup_{0\leqq\tau\leqq 1}\left|\int_0^t (b(\tau,y_\tau^{(n)})-b(\tau,y_\tau^{(n-1)}))dx_\tau\right|\leqq\frac{1}{2^n}\text{"}$$

故ニ正数 η ニ対シテ、$n_0(\eta)$ ヲ充分大キクトレバ確率 η ノ例外ヲ除イテ

(14) "$n\geqq n_0(\eta)$ ナル限リ (3) ガ成立スル"

又 $a(\tau,y_\tau^{(n_0)})-a(\tau,y_\tau^{(n_0-1)})$ ハ可動不連続点ヲ持タナイカラ充分大キイ $K(\eta)$ ニ対シテハ、確率 η ノ例外ヲ除イテ

$$(15)\quad |a(\tau,y_\tau^{(n_0)})-a(\tau,y_\tau^{(n_0-1)})|\leqq K\quad (0\leqq t\leqq 1)$$

(14)ト(15)トガ同時ニ成立スル場合ヲ Ω' ニテアラハスト

$$(16)\quad P(\Omega')>1-2\eta$$

(※)式ニ於テ $n=n_0$ トオキ、(14),(15)ヲ用ヒテ、"Ω' ノ上デハ

$$(17)\quad |y_t^{(n_0+1)}-y_t^{(n_0)}|\leqq Kt+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\quad (0\leqq t\leqq 1)$$

ガ成立スル" コトガ分ル。

次ニ(※)式ニ於テ $n=n_0+1$ トオキ(14)式、(17)式、及ビ(3)式ヲ用ヒテ

$$\left|y_t^{(n_0+2)}-y_t^{(n_0+1)}\right| \leqq \int_0^t A\left|y_t^{(n_0+1)}-y_t^{(n_0)}\right|dt+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1}$$

$$\leqq AK\frac{t^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}(tA)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+1}$$

同様ナ論法ヲ繰返シテ

$$\left|y_t^{(n_0+m)}-y_t^{(n_0+m-1)}\right|$$

$$\leqq A^{m-1}K\frac{t^m}{\underline{\lfloor m}}+\sum_{r=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+r}\frac{(tA)^{m-1-r}}{\underline{\lfloor m-1-r}}$$

$$=A^{m-1}\cdot K\cdot\frac{t^m}{\underline{\lfloor m}}+\sum_{r=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+m-1-r}\frac{(tA)^r}{\underline{\lfloor r}}$$

$$=A^{m-1}K\frac{t^m}{\underline{\lfloor m}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+m-1}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(2+A)^r}{\underline{\lfloor r}}$$

$$\leqq A^{m-1}K\frac{1}{\underline{\lfloor m}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0+m-1}e^A \qquad (m=1,2,3,\cdots\cdots)$$

然ルニ、コノ最後ノ式ヲ項トスル級数ハ收斂スルカラ、

$\sum_{m=1}^{\infty}\left(y_t^{(n_0+m)}-y_t^{(n_0+m-1)}\right)$ ハ Ω' ノ上デハ t ニ関シテ一様ニ收斂スル。

故ニ $\{y_t^{(n)}\}$ ナル確率過程ノ列ハ strong topology ニ関シテ確率收斂スル。故ニソノ limit タル $\{y_t\}$ ハ可

動不連續点ヲモタナイ。

又定義ニヨリ $y_t^{(n)}$ ハ $x_{\circ}t$ ノ函數デアル。故ニ y_t モ亦而リ。故ニ $a(t, y_t)$ 及ビ $b(t, y_t)$ モ亦然リ。

又 §9 (3) 式ニヨレバ y_t ガ可動不連續点ヲモタナイコトカラ、$a(t, y_t)$. $b(t, y_t)$ モ亦可動不連續点ヲモタナイコトガ分ル。更ニ $\{y_t^{(n)}\}$ ガ $\{y_t\}$ ニ strong topology ニ関シテ確率收斂スルコトカラ $\int_0^t a(\tau, y_\tau^{(n)})d\tau$ ガ $\int_0^t a(\tau, y_\tau)d\tau$ ニ確率收斂スルコトモ分ルシ、又定理 5.5 ニヨリ $\int_0^t b(\tau, y_\tau^{(n)})dx_\tau$ ガ $\int_0^t b(\tau, y_\tau)dx_\tau$ ニ確率收斂スルコトガ分ル。故ニ (4) 式ニヨリ y_τ ハ §9 ノ積分方程式 (4) ヲ満足スル。

§11. 9節ノ積分方程式ノ解ノ唯一性ノ証明

1°. $|a(\tau, y)|, |b(\tau, y)|$ ガ $0 \leqq \tau \leqq 1, -\infty < y < \infty$ デ一様ニ有界デアル時（ソノ上限ヲ M トスル）

解ガ二通リ（y_t', y_t''）アルトスル。

(1) $y_t' - y_t''$

$$= \int_0^t (a(\tau, y_\tau') - a(\tau, y_\tau''))d\tau + \int_0^t (b(\tau, y_\tau') - b(\tau, y_\tau''))dx_\tau$$

$$E\left\{\left(\int_0^t (a(\tau, y_\tau') - a(\tau, y_\tau''))d\tau\right)^2\right\} \leqq \left(\int_0^t M d\tau\right)^2 = M^2 \cdot t^2 < \infty$$

定理5.4ニヨリ

$$E\left\{\left(\int_0^t (b(\tau,y'_\tau)-b(\tau,y''_\tau))dx_\tau\right)^2\right\}\leqq\int_0^t M^2 d\tau=M^2 t<\infty$$

上ノ二式ト(1)トカラ $E((x+y)^2)\leqq\left(\sqrt{E(x^2)}+\sqrt{E(y^2)}\right)^2$ ニヨリ

$$(2)\quad E\{(y'_t-y''_t)^2\}\leqq(Mt+M\sqrt{t})^2\leqq 4M^2\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

備テ $E\{(y'_t-y''_t)^2\}\leqq K(t)$ ナラバ (3) 及ビ *Lemma* 10.1

及ビ定理5.4ニヨリ

$$E\left\{\left(\int_0^t (a(\tau,y'_\tau)-a(\tau,y''_\tau))d\tau\right)^2\right\}\leqq t\int_0^t A^2K(t)dt\leqq A^2\int_0^t K(t)dt$$

$$E\left\{\left(\int_0^t (b(\tau,y'_\tau)-b(\tau,y''_\tau))dx_\tau\right)^2\right\}\leqq\int_0^t B^2K(t)dt\leqq B^2\int_0^t K(t)dt$$

コノ二式ト(1)トカラ

$$(3)\quad E\{(y'_t-y''_t)^2\}\leqq(A+B)^2\int_0^t K(t)dt$$

(2)ト(3)トカラ

$$(4)\quad E\{(y'_t-y''_t)^2\}\leqq(A+B)^2(4M^2\cdot t)$$

再ビ(4)ト(3)トカラ $E\{(y'_t-y''_t)^2\}\leqq(A+B)^4\left(4M^2\cdot\frac{t^2}{2}\right)$

コレヲ繰返シテ

$$(5)\quad E\{(y'_t-y''_t)^2\}\leqq 4M^2\frac{((A+B)^2\cdot t)^n}{\lfloor n}\longrightarrow 0\quad(n\to 0)$$

故ニ $E\{(y'_t-y''_t)^2\}=0$

故ニ $P(y'_t=y''_t)=1$

2°. 一般ノ場合。 $|a(t,c)|, |b(t,c)|$ ハ共ニ t ノ連續函數ナル故 $0 \leqq t \leqq 1$ ニ於テ有限値 α ニテ抑ヘラレル。

(6) $$|a(t,y)| \leqq |a(t,c)| + |a(t,c) - a(t,c)|$$
$$\leqq \alpha + A|y-c|$$

(7) $$|b(t,y)| \leqq \alpha + B|y-c|$$

今 Ω_K ヲ

(8) $$\Omega_K = \left(\sup_{0\leqq \tau \leqq 1} |y'_\tau - c| < K\right)\left(\sup_{0\leqq \tau\leqq 1} |y''_\tau - c| < K\right)$$

ニヨッテ定義スレバ、Ω_K ハ K ト共ニ增大シ

(9) $$P(\Omega_K) \longrightarrow 1 \quad (K \to \infty)$$

且ツ Ω_K ノ上デハ

(10) $$|a(t,y_t)|, |b(t,y_t)| \leqq 2\alpha + (A+B)K$$
$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

コノ右辺ヲ M ト置ク。サテ $b_M(t,y)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$b(t,y) > M$ ナラバ $b_M(t,y) = M$

$M \geqq b(t,y) \geqq -M$ ナラバ $b_M(t,y) = b(t,y)$

$b(t,y) < -M$ ナラバ $b_M(t,y) = -M$

今問題ノ解ガ二通リアルトシ、之ヲ y'_t, y''_t トスルト

(12) $$P(y'_t \neq y''_t) > 0$$

コレガ矛盾ニ導カレルコトヲ証明スレバ、解ノ唯一性ガ示サレタコトニナル。

(13) $$P(\Omega_K \cdot (y'_t \neq y''_t)) \geqq P(y'_t \neq y''_t) - (1 - P(\Omega_K))$$

(9) (12) (13) ニヨリ充分大キイKニ對シテハ

(14) $P(\Omega_K\ (y'_t \neq y''_t)) > 0$

備テ Ω_K ノ上デハ

$$b_M(t, y_t) = b(t, y_t),\ a_M(t, y_t) = a(t, y_t)$$
$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

故ニ y'_t モ y''_t モ共ニ Ω_K ノ上デハ

(15) $$y_t = C + \int_0^t a_M(\tau, y_\tau)\, d\tau + \int_0^t b_M(\tau, y_\tau)\, dx_\tau$$

ヲ満足スル。

定義ニヨリ明ラカニ $a_M(t, y)$, $b_M(t, y)$ ハ §9ニ掲ゲタ條件(3)ヲ満足シ、且ツ何レモ絶對値ニ於テMヨリ小サイ。故ニ"1°"ニヨリ(15)ノ解ハ唯一ツデ之レヲ $y_t^{(M)}$ トスレバ、Ω_K ノ上デハ確率0ヲ除イテ

$$y_t^{(M)} = y'_t = y''_t$$

即チ $P\{(y'_t = y''_t) \cdot \Omega_K\} = 0$. 之ハ(14)ト矛盾スル。

§12. 9節ノ積分方程式ノ解ガ Markoff process ナルコトノ証明

(1) $$Z_s = \eta + \int_t^s a(\tau, Z_\tau)\, d\tau + \int_t^s b(\tau, Z_\tau)\, dx_\tau$$

ノ解ヲ $Z_s = f(t, s, \eta, \widetilde{x}_{ts})$

ニテ表ハス.

茲ニ $\widetilde{x}_{ts}=(x_\tau - x_t\ ;\ t \leqq \tau \leqq s)$

fガ定マラナイヤウナ場合ヲ $\widetilde{N}_{ts}(\eta)$ ニテアラハス。コレハ $\widetilde{x}_{ts}$ ニ関スル條件デ表ハサレル。今 y_s ヲ前節デ得タ解トシ

(2) $y'_s = y_s \qquad (0 \leqq s \leqq t)$

$y'_s = f(t, s, y_t, \widetilde{x}_{ts}) \quad (s > t)$

偖テ $f(t, s, y_t, \widetilde{x}_{ts})$ ガ定マラナイノハ

(3) y_t ガ定マラナイカ。

(4) $\bigcup_{\eta}(y_t=\eta)(\widetilde{x}_{ts} \in \widetilde{N}_{ts}(\eta))$

ノ何レカデアルガ、(3) ノ確率ハ明ラカニ 0. (4) ノ確率ハ

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_{y_t}(d\eta) P(\widetilde{N}_{ts}(y) \mid y_t=\eta)$

(F_y ハ y ノ確率法則)

然ルニ $\widetilde{x}_{ts}$ ト y_t トハ独立デアル。(y_t ハ x_{0t} ノ函數デアルカラ)

故ニ $P(\widetilde{N}_{ts} \mid y_t=\eta) = P(\widetilde{N}_{ts}) = 0$

故ニ (5) 式モ 0 デ、從ッテ (4) ノ確率モ 0 デアル。

偖テ $s \leqq t$ ナラバ

(6) $\displaystyle y'_s = y_s = c + \int_0^s a(\tau, y_\tau)\,d\tau + \int_0^s b(\tau, y_\tau)\,dx_\tau$

$\displaystyle = c + \int_0^s a(\tau, y'_\tau)\,d\tau + \int_0^s b(\tau, y'_\tau)\,dx_\tau$

若シ $s>t$ ナラバ

$$(7)\quad y'_s=f(t,s,y_t,\widetilde{x}_{ts})$$

$$=y_t+\int_t^s a(\tau,y'_\tau)d\tau+\int_t^s b(\tau,y'_\tau)dx_\tau$$

（f ノ定義！）

(6) ニ於テ $s=t$ トオイタ式ヲ (7) ニ代入シテ

$$(8)\quad y'_s=c+\int_0^s a(\tau,y'_\tau)d\tau+\int_0^s b(\tau,y'_\tau)dx_\tau$$

故ニ $\{y'_s\}$ ハ §9 ノ積分方程式ノ解 $\{y_s\}$ ニ一致スル。

故ニ　$s\geqq t$ ナラバ　$y_s=f(t,s,y_t,\widetilde{x}_{ts})$

$$F_{y_s/x_{0t}=\xi_{0t}}=F_{f(t,s,y_t(\xi_{0t}),\widetilde{x}_{ts})/x_{0t}=\xi_{0t}}$$

$$=F_{f(t,s,y_t(\xi_{0t}),\widetilde{x}_{ts})}$$

（最後ノ等式ハ $f(t,s,y_t(\xi_{0t}),\widetilde{x}_{ts})$ ガ $\widetilde{x}_{ts}$ ノ函数デ、従ツテ x_{0t} ト独立デアルカラデアル。）

故ニ $F_{y_t/x_{0t}=\xi_{0t}}$ ハ $y_t(\xi_{0t})$ ニノミ関係スル。y_{0t} ハ x_{0t} ノ函数ナル故 $F_{y_t/y_{0t}=\eta_{0t}}$ モ亦 η_t ニノミ関係スル。

$\boxed{q.e.d.}$

§13. 9節ノ積分方程式ノ解ガ微分方程式(1)ヲ満足スルコトノ証明

$$(1)\quad y_t=c+\int_0^t a(\tau,y_\tau)d\tau+\int_0^t b(\tau,y_\tau)dx_\tau$$

ノ解 y_t $(t \geqq t_0)$ ノ分布ヲ $y_{t_0}=\eta$ ノ下ニ於テ考ヘタルモノハ、前節ノ始メニ述ベタ所ニヨリ、

$$(2) \quad y_t = \eta + \int_{t_0}^{t} a(\tau, y_\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau, y_\tau)\,dx_\tau \quad (t \geqq t_0)$$

ノ解ノ分布ヲ無條件ノ下ニ於テ考ヘルモノト一致スル。

偖テ $y_t - y_{t_0} = y_t - \eta$

$$= \int_{t_0}^{t} a(\tau, y_\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau, y_\tau)\,dx_\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} a(\tau, y_{t_0})\,d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau, y_{t_0})\,dx_\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left(a(\tau, y_\tau) - a(\tau, y_{\tau_0})\right) d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left(b(\tau, y_\tau) - b(\tau, y_{\tau_0})\right) dx_\tau$$

故ニ

$$(2') \quad y_t - y_{t_0} = \int_{t_0}^{t} a(\tau, y_{t_0})\,d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau, y_{t_0})\,dx_\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left(a(\tau, y_\tau) - a(\tau, y_{t_0})\right) d\tau + \sum_{\Delta}^{t} \left(b(\tau_{i-1}, y_{\tau_{i-1}}) - b(\tau_{i-1}, y_{t_0})\right)(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$$+ \left\{ \int_{t_0}^{t} b(\tau, y_{t_0})\,dx_\tau - \sum_{\Delta}^{t} \left(b(\tau_{i-1}, y_{\tau_{i-1}}) - b(\tau_{i-1}, y_{t_0})\right)(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right\}$$

茲ニ $\sum_{\Delta}^{t}$ ハ §6 (1)式ノ $y_\Delta(t)$ ノ如ク定義シタモノデアル。今

最後ノ $\{\quad\}$ 内ヲ Y_t ニテ表ハシ、Δ ヲ充分細カクトレバ

$$(3) \quad P\{|r_t| \geqq \varepsilon(t-t_0)\} < \varepsilon(t-t_0)$$

備テ(1)ノ解ハ"§10"ノ逐次近似法ニヨリ得ラレルベキデアルカラ $|a(\tau,\eta)|\,|b(\tau,\eta)|$ ノ $s_0 \leqq \tau \leqq 1$ ニ於ケル最大値ヲMトスレバ

$$E\{(y_t-\eta)^2\} \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{4M^2R^{2n}\frac{(t-t_0)^{n+1}}{\lfloor n+1}}\right)^2$$

(茲ニ $R \equiv A+B$)

$$\leqq K(t-t_0)\left(K \equiv \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{4M^2R^{2n}\frac{1}{\lfloor n+1}}\right)^2 < \infty\right)$$

即チ $E\{(y_t-y_{t_0})^2\} \leqq K(t-t_0)$

故ニ $E\{(a(\tau,y_\tau)-a(\tau,y_{t_0}))^2\}$

$$\leqq A^2E\{(y_t-y_{t_0})^2\} \leqq A^2K(t-t_0)$$

故ニ

$$(4) \quad E\left\{\left(\int_{t_0}^{t}(a(\tau,y_\tau)-a(\tau,y_{t_0}))\,dt\right)^2\right\}$$

$$\leqq (t-t_0)\int_{t_0}^{t}KA^2(t-t_0)\,dt = \frac{A^2K}{2}(t-t_0)^3 = o(t-t_0)$$

又

$$(5) \quad E\left\{\int_{t_0}^{t}(a(\tau,y_\tau)-a(\tau,y_{t_0}))\,dt\right\}$$

$$< \sqrt{E\left\{\left(\int_{t_0}^{t}(a(\tau,y_\tau)-a(\tau,y_{t_0}))\,dt\right)^2\right\}} \leqq \sqrt{\frac{A^2K}{2}}(t-t_0)^{\frac{3}{2}} = o(t-t_0)$$

(4), (5) ヨリ

$$(5')\quad \sigma\left\{\int_{t_0}^{t}(a(\tau, y_\tau)-a(\tau, y_{t_0}))\,dt\right\}=o(\sqrt{t-t_0})$$

次ニ $E\{(y_t-y_{t_0})^2\} \leqq K(t-t_0)$ カラ

$$E\{(b(t, y_{t_0})-b(t, y_{t_0}))^2\} \leqq B^2K(t-t_0)$$

故ニ $b(t, y_t)-b(t, y_{t_0})$ ノ平均値モ存在スル。

$$(6)\quad E\left\{\sum_{\Delta}^{t}(b(\tau_{i-1}, y_{\tau_{i-1}})-b(\tau_{i-1}, y_{t_0}))(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\right\}$$

$$=\sum_{\Delta}^{t}E(\quad \text{〃} \qquad \text{〃}\quad)E(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})$$

$$=0$$

$$(7)\quad E\left\{\left(\sum_{\Delta}^{t}\right)^2\right\}=\sum_{\Delta}^{t}B^2K(\tau_i-t_0)(t_i-t_{i-1})$$

$$\leqq\int_{t_0}^{t}B^2K(\tau-t_0)\,d\tau \qquad \left(\begin{array}{l} t_0\leqq\tau_i\leqq t_{i-1}\leqq t_i \\ \text{ニ注意シテ}\end{array}\right)$$

$$=\frac{B^2K}{2}(t-t_0)^2=o(t-t_0)$$

(6) (7) ヨリ

$$(7')\quad \sigma\left\{\sum_{\Delta}^{t}\right\}=o(\sqrt{t-t_0})$$

(2′) (3) (4) (5′) (6) (7′) ニヨリ Dy_{t_0} ハ

$$(8)\quad Z_t=y_{t_0}+\int_{t_0}^{t}a(\tau, y_{t_0})\,d\tau+\int_{t_0}^{t}a(\tau, y_{t_0})\,dx_\tau$$

ノ t_0 ニ於ケル微係数 DZ_{t_0} ニ等シイ。然ルニ

$$F_{z_t - z_{t_0}} = G\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau, y_{t_0})\,d\tau, \sqrt{\int_{t_0}^{t} (b(\tau, y_{t_0}))^2\,d\tau}\right)$$

故ニ $F^{*\left[\frac{1}{t-t_0}\right]}_{Z_t - Z_{t_0}} = G\left(\left[\frac{1}{t-t_0}\right]\int_{t_0}^{t} a(\tau, y_{t_0})\,d\tau \sqrt{\left[\frac{1}{t-t_0}\right]\int_{0}^{t} b(\tau, y_{t_0})^2\,d\tau}\right)$

備テ $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\frac{1}{t-t_0}\right]\int_{t_0}^{t} a(\tau, y_{t_0})\,d\tau$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} a(\tau, y_{t_0})\,d\tau = a(t_0, y_{t_0})$$

同様ニ

$$\lim_{t\to t_0}\left[\frac{1}{t-t_0}\right]\int_{t_0}^{t} b(\tau, y_{t_0})\,d\tau = (b(t_0, y_{t_0}))^2$$

$$\therefore\ Dy_{t_0} = DZ_{t_0} = G(a(t_0, y_{t_0}), b(t_0, y_{t_0}))$$

$\boxed{q.e.d.}$

脚註

(*1) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits = rechnung. P.12

(*2) M. Frechet: Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, 第二巻. P.215

(*3) A.Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math Ann. 104. P.415)

(*4) W. Feller: Zur Theorie der stochastischen

Prozesse. (Existenz- und Eindeutigkeitssätze) (Math. Ann. 113. P. 113)

(*5) J. L. Doob: Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. Am. Math. Soc. 42 (1937), Stochastic processes with an integral-valued parameter, ibid 44 (1938)

(*6) 談話 1033 (本誌 234号) §2

(*7) 〃 〃 (〃 〃) §4

(*8) P. Lévy: Théorie de láddition des variables aléatoires, 第七章參照.

(1) 本誌 234号談話 1033 參照

(2) 本誌 234号談話 1033 同 235号談話 1043 參照

(3) コノ定義ハ本誌談話 1033 ニ於テ筆者ノ與ヘタモノトハ幾分異ナル。

シカシソコデ述ベタ注意ハ勿論コヽデモ妥當トスル。

(4) 詳シクイヘバ系 1.1 ハ "確率 1 ヲ以テ" 成立スルガ本誌談話デ述ベタ如ク、コノ "確率 1 ヲ以テ" トイフ言葉ハ特別必要ノナイ限リ省略スル。

(5) $F_{x/y}$ ハ y ガ定マッタトキノ x ノ從フ確率法則ヲ示ス。

(6,7) Theorie de láddition des variables aléatoires, p. 51.

$$d(x, y) = \inf_{\eta > 0} \{ P\{|x - y| > \eta\} + \eta \}$$

(8) §3 例3参照.

(9) 本稿ハシガキ (II) 参照.

(10) $|c_i| \leqq \varepsilon$ ナル故 $E(c_i^2)$ ハ存在シ、c_i ト $x_{t_i} - x_{t_{i-1}}$ トガ独立ナル故

$$E\{c_i^2 (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\} = E\{c_i^2\} E\{(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\}$$

又 $c_i c_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ ハ $x_{0 t_{j-1}}$ ノ函数デ $i < j$ ナル故 $x_{t_j} - x_{t_{j-1}}$ ト独立.

且ツ $|c_i c_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})| \leqq \varepsilon^2 |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|$ ナル故 $E\{c_i c_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\}$ ハ存在スル。

故ニ $E\{c_i c_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})(x_{t_j} - x_{t_{j-1}})\}$

$$= E\{c_i c_j (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\} E\{x_{t_j} - x_{t_{j-1}}\}$$

(11) P. Lévy 前掲書 p.55 及ビ p.56

(12) $E(|b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) b_{\tau_{j-1}}|)$

$$\leqq \sqrt{E\{b^2_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\} E(b^2_{\tau_{j-1}})}$$

$$= \sqrt{E\{b^2_{\tau_{i-1}}\} E\{(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})^2\} E(b^2_{\tau_{j-1}})} \quad \left(\begin{array}{c} b_{\tau_{i-1}} \text{ハ} x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \\ \text{ト独立ナル故} \end{array}\right)$$

$$\leqq \sqrt{M(\tau_{i-1}) M(\tau_{j-1}) (t_i - t_{i-1})}$$

故ニ $b_{\tau_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) b_{\tau_{j-1}}$ ハ *integrable* デアル。

(13) P. Lévy 前掲書. p. 52. 3° *La convergence en moyenne* 参照.

コヽデ $\alpha = 2$ ノ場合ヲ考ヘル。即チ $E(x^2) < \infty$ ナル實確

率変数ノ集合ハ $\rho_m(x, y) = \sqrt{E((x-y)^2)}$ ナル距離ニ関シテ完備ナル距離空間ヲ構成スル。コノ距離ニ関シテノ収斂ヲ平均収斂トイフノデアル。

(14) コノ不等式ハ脚註(13)ニ於ケル距離函数 ρ_m ガ三角形公理ヲ満スコトヲ意味スル。

(15) 脚註(13)参照。