1072. 準順序環及ビソノ應用ニツイテ

吉田 耕作，中山 正（名大）

Vernikoff-Krein-Tovbin ガ C.R.URSS 30 ニ準順序ヲモツ環ヲ論ジテ居ル（中野氏モ類似ノコトヲ論ゼラレタコトガアリ，マタ小笠原氏モ束ニナッテヰル場合ヲ考察サレタ）。ソレニツキ，環トイッテモ結合律ヲ假定シナクトモヨイコトハ容易ニ知ラレ，ソシテ（証明トシテ特ニヨリ簡単ダトイフワケデモナク結局同ジコトデスガ）準順序群ニ關スル一般的ノコトカラ容易ニ出スコトガ出來ルコトヲ初メニ注意シタイ。即チ：

先ヅ準順序群 G（以下常ニ加法的ニ書カレタ可換群ノミヲ考察スル。勿論順序ハ算法デ保タレルトスル。即チ $a \geqq 0,\ b \geqq 0 \longrightarrow a+b \geqq 0$）。而シテ

(i) $na \geqq 0$（n ハアル自然數）$\longrightarrow a \geqq 0$

ヲ假定スル（コレハ後ニ假定スル様ニ實數ガ掛ケラレルトスレバ勿論充タサレテヰル）然ラバ Clifford-Lorenzen ニヨリ G ハ適當ナ線型順序群ノ直積ノ部分群ニ順序

ヲフクメテ同型ニナル。

$$G \cong G^* \subseteq \cdots\cdots \times G_\sigma \times \cdots\cdots$$

（G_σ ハ線型順序群，直積ニ於ケル順序ハ分論項別）[1]

コンデ分論 G ノ元ヲウゴクトキ G_σ ノ全体ニワタルトシテヨイ。

次ニ

（條件 A）　G ニハアル元ノ >0 ガアッテ，G ノイカナ

---

1) 実ハ G_σ ハドレモ群トシテハ G 自身ニ同型ニトレル。云ハバ G_σ ハ G ノ順序ヲ更ニツケカヘタモノト見ラレル。ソノコトハ *Lorenzen* ヨリ直接ノ Krull-Clifford 式ノ証明ノ方ガ見易イ。*Clifford* ノ論文ハ全然証明ガナイカラ念ノタメ補ツテオカウ：G ノ元ノ集合 P デ 1) $a, b \in P \to a+b \in P$,　2) $a \leqq b$, $a \in P \to b \in P$, 3) $0 \notin P$, 4) $na \in P \to a \in P$ ナル條件ヲミタスモノヲ考ヘル。ハジメニ G ノ >0 ナル元ノ全体ヲ P_0 トシ P_0 ヲ含ムコノ様ナ P ヲ考ヘル。アル P ニツキ $c \notin P$, $-c \notin P$ ナル c ガアレバ P ト c ヲ含ム第二ノ P' ガトレル。ソレハ $ma \geqq p + nc$（p ハ 0 カ $\in P$）ナル a ノ全体ヲトレバヨイ（$m, n = 1, 2, \cdots\cdots$）。マタアル P ニ對シテ $a \in P$ ナルコトヲ $a > 0\ (P)$ トスレバ G ニ新タニ一ツノ順序ガツク。モトノ正元ハ分論コノ正元デアル。而シテ上述ヨリ極大ナ P ニツイテハコノ順序ハ線型トナル。極大ノ P ノ全体ヲ $\{P_\sigma\}$ トシ，P_σ ニ對應シテ順序ヲツケカヘタモノヲ G_σ トスレバヨイ。

ル a ニ對シテモ適當ナ自然數 n ヲトレバー $n\cdot 1 \leqq a \leqq n\cdot 1$ トナル（あるきめです単位）

ヲ假定スル。各 σ ニツキ 1 ノ像 1_σ ハ G_σ ノあるきめです単位ナルコト明カデアル。今 G ニオイテ，1 ニ對シテ無限小，即チ

(2) 如何ナル自然數 n ニ對シテモ $-1 \leqq n\cdot a \leqq 1$

ナル如キ元ノ全体ヲ N トスレバ，N ハ一ツノ "normal" ナ部分群ヲナス。コヽニアル部分群 H が "normal" トハ

(3) $a, b \in H$ 且ツ $a \geqq c \geqq b$ ナラバ $c \in H$

ヲミタスコトトスル。順序ヲ保ツ準同型ノ核ハ常ニ "normal" デアリ逆モ成立ツ。同様ニ，G_σ ニオイテ 1_σ ニ対シ無限小ナル元ノ全体ヲ N_σ トスル。然ラバ G ノアル元 a が N ニ属スルタメニハ，ドノ σ ニツイテモ a ノ像 a_σ が N_σ ニ属スルコトが必要且ツ充分デアル。ヨッテ G/N ハ G_σ/N_σ ノ直積ノ中ニ同型ニ寫像サレル：

$$G/N \longrightarrow (\text{中ニ同型ニ}) \cdots\cdots \times G_\sigma/N_\sigma \times \cdots\cdots,$$

而シテ順序ハ $\longrightarrow$ ノ向キニ保タレル。コヽニ G_σ/N_σ ハあるきめです的線型順序群ダカラ実数ノ（加法）群ノアル部分群デアル。特ニ弱イあるきめです條件

（條件 B） $-1 \leqq na \leqq 1$ （$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）ナラバ $a = 0$」

ヲ假定スレバ，

<u>定理 1</u> （條件 A 及ビ B ノ下ニ）G ハ実数ノ群ノ部分群

ナル G_σ/N_σ ノ直積ノ中ニ同型ニ寫像サレ:

$$G \longrightarrow (\text{中ニ同型ニ}) \cdots\cdots \times G_\sigma/N_\sigma \times \cdots\cdots,$$

而シテ順序ガ $\longrightarrow$ ノ向キニ保タレル. 即チアル空間ノ実函數ノ群ノ中ニ同型ニ, $\longrightarrow$ ノ向キニ順序ヲタモッテ寫像サレル。

コヽデ更ニ強イあるきめです條件

(條件C) $na \leqq 1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ナラバ $a \leqq 0$ ヲ導入スレバ

<u>定理2</u> 條件A及ビC(從ッテ勿論Bモ)ヲ假定スレバ, 上ノ G ト $\cdots\cdots \times G_\sigma/N_\sigma \times \cdots\cdots$ ノ部分群ト同型ニオイテ両方ノ向キニ順序ガ保タレル. 即チ G ハアル空間ノ実函數ノ群ノ部分群ニ順序ヲフクメテ同型ニナル。

何者, a, b ヲ表現スル函數ヲ f_a, f_b トシ $f_a \geqq f_b$ トスレバ $f_{(b-a)} \leqq 0$ (0函數) 然ルニコレハドノ σ ニ対シテモ $b-a$ ノ像 $(b-a)_\sigma$ ガ

$$(b-a)_\sigma \leqq 0_\sigma + n_\sigma = n_\sigma \quad (n_\sigma \in N_\sigma)$$

ヲミタスコトニ他ナラヌ. コレヨリ如何ナル自然數 t ニ對シテモ

$$t\cdot(b-a)_\sigma \leqq t\cdot n_\sigma \leqq 1_\sigma.$$

從ッテ $t\cdot(b-a) \leqq 1$. 故ニ $b-a \leqq 0$, $b \leqq a$ トナリ, コレハ順序ガ逆向キニモ保タレルコトヲ示ス。

サテ, 我々ノ G = (普通ノ如クニ) <u>實數ガ掛ケラレ</u>ルト假定スル. 然ラバ G_σ/N_σ ハ実數全体トナリ, ソレラハ $\alpha\cdot 1_\sigma$ $(=(\alpha\cdot 1)_\sigma)$ ナル形ノ元 (ノ類) トシテ

表ハサレル。

以上ハ，要スルニ単ニ準順序群ニツイテノ一般的ノ事柄デアリ、何モ目新シイコトハナイデアラウ．而シテソレカラ環ヘノ移行ハ容易デアル．ソノタメ先ヅ

G ハ第二ノ準順序群 Λ ヲ作用域トシテ有シ，而シテ Λ デノ算法ハ作用素トシテノソレニ對應シ，マタ Λ ノ正元ニヨツテ G ニオケル順序ハ保タレルトスル。即チ

3) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,\ (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$

$$(\lambda,\ \mu\in\Lambda),$$

4) $\lambda\geqq 0$ (Λ デ)，$a\geqq 0$ (G デ) ナラバ

$\lambda a\geqq 0$ (G デ)

トスル．コレラハ勿論當リ前ノコトダが，更ニ

(條件 A^*) Λ ノ中ニアル ε がアリ，ソレハ恒等作用素ニ對應シ ($\varepsilon a=a$)，且ツ ε ハ Λ ニオケルあるきめて才単位デアル．

ヲ假定スル．然ラバ

<u>補題</u> G ノ任意ノ "normal" ナ部分群ハ Λ ニ對シテ認容 (zulässig) デアル．

何者，normal ナ部分群ヲ H トシ，今 $x\in H$，$\lambda\in\Lambda$ トスレバ適當ナ自然数 n ニ對シテ

$-n\varepsilon\leqq\lambda\leqq n\varepsilon$，故ニ $-n\varepsilon\cdot a\leqq\lambda a\leqq n\varepsilon a$

即チ $-na\leqq\lambda a\leqq na$ トナリ，H が normal ナコトヨリ $\lambda a\in H$.

コノ補題ハ G カラノ順序ヲ保ツ準同型寫像ハ當ニ作

用準同型デアルコトヲ示ス. コレガ万事ヲ解決シテクレル. 即チ特ニ $G \longrightarrow G_\sigma/N_\sigma$ ナル準同型ハ作用準同型デアリ

定理1.* G ガ (A^*) ヲミタス Λ ヲモツトキ, 定理1ニオケル「同型」ヲ作用同型デオキカヘテヨイ。

定理2.* 定理2ニツイテ同様.

サテ, G ト Λ ガ一致シ, 而モ 1 ト ε ガ一致シ, 而シテ G ニ實數ガ掛ケラレル場合ヲ考ヘル. 即チ G ハ實數ノ上ノアル(結合律モ可換律モ假定シナイ)環デアル. コノ場合 $G \longrightarrow G_\sigma/N_\sigma$ ハ G ヲアルいでやる M_σ デ割ルコトニヨリ得ラレル: $G \rightarrow G/M_\sigma \cong G_\sigma/N_\sigma$.

而シテ實數 α, β ニ對シテ $\alpha 1 \cdot \beta 1 = \alpha\beta \cdot 1$ ダカラ, コレヲ mod M_σ デ考ヘテワカル如ク, G/M_σ ハ加法群トシテ實數群ナルノミナラズ乘法モ實數ノソレニ對應スル. ヨッテ

定理1°. 實數ノ上ノ準順序(結合律モ可換律モ假定シナイ)環 G ニ於テ, 単位元 1 ニ對シテ條件 A, 更ニ條件 B ガミタサレテヰルナラバ, G ハアル空間ノ實函數ノ環ノ中ニ同型ニ, 而モ $\longrightarrow$ ノ向キニ順序ヲ保ツテ寫像サレル. 特ニ G ハ結合律及ビ可換律ヲミタス.

定理2°. 更ニ條件 C モ充サレテヰルナラバ, G ハ實函數ノ環ノ部分環ニ順序ヲコメテ(即チ両方ノ向キニ順序ヲ保ツテ)同型ニナル.

コヽデ M_σ ハ勿論 G ノ "normal" ナ最大いでやるデ

アルガ，上記デハ最大 normal いでやるノ全体ヲウゴクコトヲ必要トシテヰナイ．シカシ定理1°, 2° ニオケル空間トシテ最大 normal いでやるノ全体 $\mathfrak{M}$ ヲ勿論トッテヨイ，サテカヽル空間 $\mathfrak{M}$ ニ弱位相ヲ入レテ，$\mathfrak{M}$ ヲ bi-compact ニシ，且ツ G ノ元ニ對應スル函數ガ $\mathfrak{M}$ デ連續トナルコトハ常套ノ通リデアル。

Hilbert 空間ノ有界 Hermite 作用素ヘノ應用

實數体ヲ係數トシ單位元 e ヲ有スル環 R ヲ考ヘル．R ハ associative トモ commutative トモ假定シナイ．R ニ準順序 $a \geqq b$ $(a-b \geqq 0)$ ガ定義サレ

(I) $a \geqq 0,\ \alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha a \geqq 0$

(II) $a \geqq 0,\ -a \geqq 0$ ナラ $a = 0$

(III) $a \geqq 0,\ b \geqq 0$ ナラ $a+b \geqq 0,\ ab \geqq 0$

(IV) 任意ノ a ニ對シ $-\alpha e \leqq a \leqq \alpha e$ ナル如キ正數 $\alpha = \alpha(a)$ ガ定マル．

(V) のるむ $\|a\| = \inf\limits_{\alpha > 0} \{\alpha \mid -\alpha e \leqq a \leqq \alpha e\}$ ノ意味デ R ハ Banach 空間ニナル．

(VI) 上カラ押ヘラレタ單調增加列 $\{a_n\}$ ニ對シテ order-lim a_n ガ存在スル．

ヲ滿足スルトスル．然ラバ

$\boxed{\text{Spectral 定理}}$ 任意ノ $a \in R$ ニ對シテ resolution of the identity $\{e_\lambda\}$ ガ次ノ如ク定マル。

(i) $e_\lambda^2 = e_\lambda \leqq e_\mu = e_\mu^2 \quad (\lambda \leqq \mu)$

(ii) $\lambda_n \downarrow \lambda$ ナラバ order-limit $e_{\lambda_n} = e_\lambda$,

(iii) $\lambda \geqq \|a\|$ ナラバ $e_\lambda = e$, $\lambda < -\|a\|$ ナラバ $e_\lambda = 0$

(iv) 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$a = \int_{-\|a\|-\varepsilon}^{\|a\|} \lambda \, d e_\lambda$$

(semi-order ノ意味ノ Riemann-Stieltjes 積分)

(v) $\{e_\lambda\}$ ハ (i)―(iv) ニヨリ unique ニ定マル.

［証明］ R ガ (I)―(V) ヲ満足スルカラ, 定理 2° ト良ク知ラレタ論法（例ヘバ本紙第 218 号中野氏ノ談話ヲミラレタイ）ニヨリ, R ハ或ル bicompact 空間 $\mathfrak{M}$ ノ上ノ連續函數ノ全体 $R(\mathfrak{M})$ ト ring-order-isomorphic:

$$R \ni x \longleftrightarrow x(M) \in R(\mathfrak{M})$$

所デ R ハ次ノ性質（假リニ B－性質トデモ呼バウ）ヲモツ: $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq b$ 且ツ order-limit $a_n = a$ トスル. Baire ノ定理ニヨリ $\bar{a}(M) = \lim_{n\to\infty} a_n(M)$ ノ不連續点ハ non-dense, 且ツ $\mathfrak{M}$ ノ上到ル所デ定義カラ $\bar{a}(M) \leqq a(M)$. B－性質ト呼ブノハ

$$\underset{M}{\mathcal{E}}\{a(M) - \bar{a}(M) > 0\} \text{ ガ non-dense}$$

ナコトデアル。ソノ証明ハ次ノ通リ：若シアル開集合 $U(M_0)$ ニ対シテ，$\bar{a}(M)$ ハ $U(M_0)$ デ連續且ツ $U(M_0)$ デ $a(M) > \bar{a}(M)$ トスルト，定義 $a = \text{order-limit } a_n$ ト isomorphism $R \longleftrightarrow R(\mathfrak{M})$ トニ反スル。

次ニ $\mathfrak{M}$ ノ上デ有界且ツ或ル連續函數 $a(M)$ ト non-dense set ニ於テノミ異ルヤウナ函數 $a'(M)$ ノ全体 $R'(\mathfrak{M})$ ヲ考ヘル。各 $a'(M)$ ニ對シテ $a(M)$ ハ唯一ツ定マリ，又同ジ $a(M)$ ニ對應スルヤウナ二ツノ函數 $\in R'(\mathfrak{M})$ ハ non-dense set ノ上デノミ異ル。

偖テ各 $a(M) \in R(\mathfrak{M})$ ニ對シテ $\underset{M}{\mathcal{E}}\{X(M) \leqq \lambda\}$ ノ特性函數ヲ $e'_\lambda(M)$ トスレバ

$$\lambda_n = \|a\|, \quad \varepsilon \geqq \lambda_{m+1} - \lambda_m \geqq 0,$$
$$\lambda_0 = -\|a\| - \varepsilon$$

ナルトキ $\mathfrak{M}$ 上到ル所デ

$$-\varepsilon \leqq a(M) - \sum_i \lambda_i \left\{ e'_{\lambda_{i+1}}(M) - e'_{\lambda_i}(M) \right\} \leqq \varepsilon$$

明カニ各 $e'_\lambda(M) \in R'(\mathfrak{M})$ ダカラ，unique ニ定マル $e_\lambda(M) \in R(\mathfrak{M})$ ヲ用ヒ上カラ

$$-\varepsilon \leqq a(M) - \sum_i \lambda_i \left\{ e_{\lambda_{i+1}}(M) - e_{\lambda_i}(M) \right\} \leqq \varepsilon.$$

従ツテ isomorphism $R \longleftrightarrow R(\mathfrak{M})$ ニヨリ R ニ帰リ

$$-\varepsilon e \leqq a - \sum_i \lambda_i (e_{\lambda_{i+1}} - e_{\lambda_i}) \leqq \varepsilon e \qquad \text{(以上)}$$

（注意） 以上ノ様ニスレバ Freudenthal 流ノ議論ヲセズニ spectral theorem ノ証明ガ出来ル。[1] 上定理ノ形ナラバ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ有界 Hermite 作用素カラ生成サレタ環 R ニ應用スルノハ容易イ。実際コノ場合ハ R ガ (I)—(VI) ヲ満足スルコトハ簡単ニワカルノデ都合ガヨイ。

(III) ノ中ノ $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ ナラ $ab \geqq 0$ ノ証明ハ談話 106 ノニ紹介シタ。蛇足ナガラ (VI) ノ簡単ナ証明ヲモ, Riesz ノ論法ヲ modify シテ, 紹介シトカウ。

互ニ可換ナ有界 Hermite 作用素列ガ $0 \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq \cdots\cdots \leqq S$ [2] ヲ満足スルトキ order-limit T_n ノ存在ヲ云フトヨイ。所 全テノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ対シテ $\{(T_n^2 \cdot f, f)\}$ ガ有界数列トナルカラ $\lim (T_n^2 \cdot f, f)$ ガ存在スル。
(III) ニヨリ $T_{n+k}^2 \geqq T_{n+k} T_n \geqq T_n^2$ ダカラ

$$\lim (T_{n+k}^2 \cdot f, f) = \lim (T_{n+k} T_n \cdot f, f)$$
$$= \lim (T_n^2 \cdot f, f)$$

従テ $\lim \left((T_n - T_m)^2 \cdot f, f\right) = \lim \| T_n \cdot f - T_m \cdot f \|^2 = 0.$

---

(1) 中野氏モ「点函数トシテノ表現」カラ「集合函数トシテノ表現」ヲ導カレタコトガアル旨御手紙ヲ頂イタ。吾々ノ問題トシタノハ導ク可能性デハナク導キ方デアル積リナノデアルケレドモ,コウ書イテキテミルト餘リ巧イトモ思ヘナイ。諸兄ノ御高教ヲ仰グ次第デス。尚木種々御注意ヲ頂イタ中野氏ニ厚ク感謝致シマス。

故ニ strong-limit $T_n \cdot f = T \cdot f$ ガ存在スル。$T=$ order-limit T_n ナルコトハ明カ。

序デナガラ上ノ論デ unitary 或ヒハ尚一般ニ normal operator ガ扱ヘルコトヲ注意シトキタイ。

Vector 束ト semi-ordered ring トノ equivalence[1]

嘗テ筆者ノ一人モ此ノ問題ヲ考ヘタコトガアルガ、Riesz ノ方法デ vector 束ヲ ring ニ直シタトキ associative law ノ証明デユキヅマッタ。コノ点ハ associative law ヲ仮定シナイ V-K-T ノ定理ヲ(Gelfand ノ定理ノ代リニ)使フコトニヨリ救ハレル訳デアラウ。

最後ニオ詫ビシナケレバナラナイノハ筆者ノ一人ガ談話 1061 ニ紹介シタ積リノ V-K-T ノ定理ノ証明ハ「originial ノ改悪」デアリ、所々重大ナ誤リガアリマシタ。

(本談話ノ如クスレバヨイ譯デハアリマスガ)

偖テソレハ何所ガ悪カッタカト云ヒマスト simple 即チ convex, non-trivial, two-sided ideal ヲ含マナイ semi-ordered ring R with unit e ガ Archimedean ト云フ所ノ証明デアリマス。

---

(1) 本紙第 227 号河田氏談話ヲ参照セラレタイ。

(※) order-limit $\frac{1}{n}e = 0$

デナイトシテ矛盾ヲ出スノニ

(※※) $e > nb$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$, $b > 0$

カラ不合理ヲ導イタノデアリマシタガ, Rガ lattice ト未ダワカッテヰナイノダカラ(※)ヲ否定シテモ必ズシモ(※※)ガ出ナイカラデス。