1069. Kantrovitch ノ regularity ニ就テ

中野 秀五郎

Kantrovitch ノ Lineare halbgeordnete Räume (Rec. Math. 1937) ニ於ケル主タル仕事ハ何ト云ッテモ Star-convergence ト regularity トデアラウ. 然シ regularity ハ其レカラ出テ来ル結果ハ美シイガ、其ノ定義ハアマリ簡單トハ云ヘナイ。即チ或ル一ツノ Vector lattice ガ regular デアルカナイカヲ見別ルニハアマリ都合ヨクハナイ。以下 regularity ニ就テ氣付イタ事ヲ二三述ベ度思フ。

Vector lattice $\mathfrak{M}$ ハ complete デアッテ、若シモ $\mathfrak{M}$ ノ elements ノ集合ノ列 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots$ ニ對シ

$$\cup \mathfrak{M}_1, \ \cup \mathfrak{M}_2, \ \cdots\cdots$$

$$(\text{或ハ } \cap \mathfrak{M}_1, \ \cap \mathfrak{M}_2, \ \cdots\cdots)$$

ガ order-convergent ナレバ、$\mathfrak{M}_i$ ノ中カラ有限個 $\mathfrak{L}_i$ ヲ選ビ出シ

$$\lim_{i\to\infty} \cup \mathfrak{L}_i = \lim_{i\to\infty} \cup \mathfrak{M}_i$$

$$(\text{或ハ } \lim_{i\to\infty} \cap \mathfrak{L}_i = \lim_{i\to\infty} \cap \mathfrak{M}_i)$$

ナラシメ得ルトキ，$\mathfrak{M}$ ヲ regular ト云フ。此レガ Kantrovitch ノ定義デアリマス。

regular ナ complete vector lattice ニ就テ次ノ事ヲ証明シテ居リマス。

1) order convergence ト relative uniform convergence トハ一致スル。

2) $\lim_{j\to\infty} a_{ij} = a_i$ デ然カモ $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ ナルトキハ

$$\lim_{i\to\infty} a_{i,j_i} = a$$

ナルヤウナ $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots\cdots$ ヲ選ビ出スコトガ出來ル。

先ヅ最初ニ vector lattice $\mathfrak{M}$ ガ σ-complete ノ場合，1), 2) ガ成立スル充分條件トシテ，次ノ定義ヲ與ヘマセウ。

定義　$\mathfrak{M}$ ヲ σ-complete ナ vector lattice トスル。若シモ

$$a_{11} \geqq a_{12} \geqq \cdots\cdots\cdots \to 0$$
$$a_{21} \geqq a_{22} \geqq \cdots\cdots\cdots \to 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナルトキハ element l ヲ適當ニ與ヘレバ

$$l \geqq a_{i,\, j_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル j_i ガ存在スルトキ、$\mathfrak{M}$ ハ regularly complete ト云フコトヽ致シマス。

$\mathfrak{M}$ ガ regularly complete デアレバ

1) order convergence ト relative uniform convergence ハ一致スル。

如何トナレバ

$$\lim_{i \to \infty} a_i = a$$

ナレバ

$$|a_i - a| \leqq l_i$$
$$l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots\cdots, \quad \lim_{i \to \infty} l_i = 0$$

ナル l_i ガ存在シマス。故ニ Kantrovitch ノ方法デ

$$i\, l_1 \geqq i\, l_2 \geqq \cdots\cdots\cdots \to 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

カラ

$$l \geqq i\, l_{j_i}$$

ナル j_i ガ存在シマス。従ツテ

$$\frac{1}{i} l \geqq l_{j_i}$$

故ニ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ハ a ニ uniformly converge シマス。

2) $\lim\limits_{j\to\infty} a_{ij} = a_i$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$ ナルトキハ

$\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij_i} = a$ ナル $j_1, j_2, \cdots\cdots$ ガ存在シマス。

如何トナレバ

$$\lim_{i\to\infty} a_{ij} = a_i$$

ナレバ 1) カラ

$$|a_{ij} - a_i| \leqq \varepsilon_{i,j}\, l_i \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$\varepsilon_{i,1} \geqq \varepsilon_{i,2} \geqq \cdots\cdots \longrightarrow 0$$

ナル l_i, $\varepsilon_{i,j}$ ガ存在シマス。又

$$\varepsilon_{i,1}\, l_i \geqq \varepsilon_{i,2}\, l_i \geqq \cdots\cdots \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

カラ

$$l \geqq \varepsilon_{i,j_i}\, l_i \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル j_i 並ニ l ガ存在シマス。

又明カニ

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\varepsilon_{i,k_i}}{\varepsilon_{i,j_i}} = 0$$

ナル様ナ $k_1, k_2, \cdots\cdots$ ガ存在シマスカラ

$$|a_{i,k_i} - a_i| \leqq \varepsilon_{i,k_i}\, l_i \leqq \frac{\varepsilon_{i,k_i}}{\varepsilon_{i,j_i}}\, l$$

従ッテ

$$\lim_{i\to\infty} a_{i,k_i} = \lim_{i\to\infty} a_i$$

デアリマス。

以上ノ regularly complete ハ勿論 Kantrovitch ノ regular ヨリ弱イ條件デアリマス。然シ Kantrovitch ノ regular ハ regularly complete デ然カモ私が superuniversal ト呼ンデキル次ノ條件トヲ一緒ニシタモノト equivalent ナコトが証明出来マス。即チ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ positive elements ノ集合 $\mathfrak{N}$ ニ對シ、$\mathfrak{N}$ カラ高々可附番個ノ elements $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ヲ適當ニ選ビ出セバ

$$\cup \mathfrak{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$$

ナラシメ得ルトキ $\mathfrak{M}$ ヲ superuniversal ト云ヒマス。

(1942, 8, 28)