1066. アルキメデス的群束ノ可換性ニ就テ

小笠原 藤次郎（廣島文理大）

アルキメデス的群束ハ切斷ニヨル完全化デ完全群束ニナル。コレハ可換群束ノ場合ト同様ニ証明サレル（略）. 故ニアルキメデス的群束ノ可換ハ完全群束ノ可換ト同義デアル。後者ハ Birkhoff ノ豫想トシテ知ラレタモノデアルガ，岩澤氏[(1)]ガ単位分解ニヨル積分表示ノ方法デ既ニ解決サレタ。ココニハ簡単ナ別証明ヲ與ヘル。補題 1, 2, 3, 4 ハ岩澤氏ノ所論ニモアルカラ参照サレタイ。

G ヲ完全群束トシ，$x_+ = x \smile 1$，$x_- = x^{-1} \smile 1$，$|x| = x_+ x_-$ ト置キ $|x| \frown |y| = 1$ ノトキ x ト y トハ直交スルト云フ。

補題 1. $x = x_+ x_-^{-1} = x_-^{-1} x_+$，$x_+ \frown x_- = 1$. 逆ニ $a \frown b = 1$. $x = ab^{-1}$ ノトキ $a = x_+$，$b = x_-$.

系. 直交ニ要素ハ可換デアル。

補題 2. $x = \bigvee_\alpha x_\alpha$ ノトキ $x \frown y = \bigvee_\alpha (x_\alpha \frown y)$

（証） $y = 1$ トシテヨイ. マタ G ハ配分束デアルカラ有限個ノ x_α ト共ニソノ結ビガ $\{x_\alpha\}$ ノナカニアルトシテヨイ。

$x = \bigvee (x_\alpha \frown 1)(x_\alpha \smile 1) = \bigvee (x_\alpha \frown 1)(x_\beta \smile 1) = \bigvee (x_\alpha \frown 1) \bigvee (x_\beta \smile 1)$
$= \{\bigvee (x_\alpha \frown 1)\}(x \smile 1)$. コレカラ $x \frown 1 = \bigvee (x_\alpha \frown 1)$

部分集合 A ノスベテノ要素ト直交スル要素ノ全体ヲ $A^\perp$ デ表ス. $A^\perp$ ノ形デ表サレル集合ヲ正規イデヤルトイフ。

---

(1) 岩澤健吉，紙數誌 1044.

$A^{\perp}=A^{\perp\perp\perp}$ が成立ツ.

補題3. $\mathfrak{a}$ ヲ正規イデヤルトスレバ $\mathfrak{a}$ ハ直積因子デ x ト共ニ $|y|\leqq|x|$ ナルスベテノ y ヲ含ム。

(証) $\mathfrak{a}$ ガ x ト共ニ $|y|\leqq|x|$ ナル y ヲ含ミ部分群ナルコトハ自明。z ヲ正要素トシ, $z_1=\bigvee(z\frown a;\ 1\leqq a\in\mathfrak{a})$ トスル. 補題2ニヨリ $z_1\in\mathfrak{a}$, $z_2=z_1^{-1}z$ ト置ク. $z_2\in\mathfrak{a}^{\perp}$. 何者. $z_2\frown a>1$, $a\in\mathfrak{a}$ トシ, $c=z_2\frown a$ ト置ク. $z=z_1z_2\geqq c^2$. コレカラ $z\geqq c^n$ ガ証明サレ矛盾ガ起ル. 任意ノ要素 x ニ對シ x ノ正部分, 負部分ニツイテ z ニ對スルト同様ノコトヲヤルト

補題4. $\mathfrak{a}$ ヲ正規イデヤルトスル. 任意ノ要素 x ハ $x=x_1x_2$, $x_1\in\mathfrak{a}$, $x_2\in\mathfrak{a}^{\perp}$ ニ唯一通リニ分解サレル. x_1 ヲ x ノ $\mathfrak{a}$ ヘノ射影トイフ. コノトキ $y^{-1}xy$ ノ $\mathfrak{a}$ ヘノ射影ハ $y^{-1}x_1y$ ニナル。

一要素 a ヲ含ム最小ノ正規イデヤルヲ $\mathfrak{a}(a)$ デ表シ, 主イデヤルトイフ. a ノ $\mathfrak{a}(a_+)$ ヘノ射影ハ a_+ デ $\geqq 1$ ナレコトヲ注意スル。

補題5. $x\geqq y\geqq 1$ ナル任意ノ x, y ガ可換ノトキ G ハ可換デアル。

(証) 任意ノ正要素 a, b ニ對シ, a ト $a\smile b$ 従テ a^{-1} ト $a\smile b$ ハ可換ニナルコトカラ $(a^{-1}b)_+=a^{-1}b\smile 1=a^{-1}(a\smile b)$ $=(a\smile b)a^{-1}=1\smile ba^{-1}=(ba^{-1})_+$, 同様ニ $(a^{-1}b)_-=(ba^{-1})_-$. 補題1ニヨリ $a^{-1}b=ba^{-1}$ 即チ $ab=ba$. コレカラ G ガ可換ニナル。

補題6. $x>y>1$ ト $x^{-1}yx<y$ ($x^{-1}yx>y$) ハ矛盾スル。

(証) $x>y>1$, $x^{-1}yx<y$ トスル。$y_1=x^{-1}yx$, $y_{n+1}=x^{-1}y_nx$ ト置ク。$z=\wedge y_n$ トスレバ $z=1$ トシテ一般性ヲ失ハナイ。何者 z ハ x ト可換 ($x^{-1}zx=\wedge x^{-1}y_nx=\wedge y_{n+1}=z$ カラ) デ必要アラバ y ノ代リニ yz^{-1} ヲ考ヘレバヨイカラ。$(y^px^{-1})_+>1$ ナル自然数 p ヲ考ヘル。$\mathfrak{a}((y^px^{-1})_+)$ ヘノ x, y ノ射影ヲ x', y' トスレバ、y^px^{-1} ノ射影ハ $y'^px'^{-1}$ デ >1。明ニ $y'^p>x'\geqq y'\geqq 1$ カラ $y'>1$。故ニ $y^p>x'>1$. $x=x^{-1}xx$ カラ $x'=x^{-1}x'x$ ナルコトヲ注意スルト $y_n^p>x'$. 故ニ $1=\wedge y_n^p\geqq x'$ トナリ矛盾ガ起ル。

コレカラ証明ノ本論ニ入ル。$x>y>1$ トスル。$a=xyx^{-1}y^{-1}$ ト置ク。x ト y ガ可換デナイトスル。$a\neq 1$ デアルカラ a_+, a_- ノ何レカハ >1。今 $a_+>1$ トスル。y ノ $\mathfrak{a}(a_+)$ ヘノ射影ヲ y' トスレバ a ノ $\mathfrak{a}(a_+)$ ヘノ射影 a_+ ハ

$$a_+=xy'x^{-1}y'^{-1}>1. \quad 故ニ \quad y'>x^{-1}y'x, \quad x>y'>1.$$

トナルカラ補題6ニヨリ矛盾ガ起ル。$a_->1$ トシテモ同様。故ニ $xy=yx$, 補題5ニヨリ G ハ可換ニナル。

以上ニヨリ非可換群束ハ非アルキメデス的デアル。例トシテハ例ヘバ中山氏ノ例ニ従ッテ実函数 $f(x)$, $-\infty<x<+\infty$ ノ全体ヲ考ヘ $f\cdot g$ トシテ $f\cdot g(x)=f(x)+g(x+1)$ トスレバヨイ。

アルキメデス的群束ノ可換性ニ就テ

小笠原　藤次郎(廣島文理大)

ノ最後ニ述ベタ例ハ筆者ノ不注意ニヨル誤リノタメ次ノ様ニ訂正スル。

「中山氏ノ例ニ従ッテ------以下ハ誤リ．之ヲ非可換群束ノ例トシテ中山氏，紙数誌，983参照ニ訂正」