# 1065. Bicompact ナ群ノ群環ニツイテ (Segal ノ定理ノ証明)

深宮　政範（阪大）

I. E. Segal ガ Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 27 (1941) 上デ locally bicompact group デ, abelian 又ハ bicompact ナ group ノ group ring ノ maximal 両側 ideal ヲ用ヒテウマク論ジテヰル。

abelian ノ場合ハ Gelfand-Raikov ノ結果ニ含マレルガ, bicompact ノ場合ハ大変面白イト考ヘラレ, 又 compact ノ場合ニモ, 亦モット一般ノ場合ニモ應用デキソウニ思ハレルガ証明ガナク, 又精シイコトモ分ラナイ。主ナ定理ノ証明ガ得ラレタヤウニ思フノデ, 以下ニ述ベテ, 御教示ヲ頂キタイト思ヒマス。

$G$ ヲ topological bicompact ナル group トシ, $G$ ノ上ノ完全加法不変測度ヲ $\mu$ トスル. 測度 $\mu$ ニ関スル Lebesgue integrable ナル函数全体ヲ $L_1 = L_1(G)$ デ表ハス。

$L_1$ ハ積及ビノルムガ夫々

$$f \circ g = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, d\mu_t$$

$$\|f\| = \int_G |f(s)|\, ds$$

ト考ヘレバノルムノ定義サレタ(non-commutative)環デアル。茲ニ"ノルム"ハ

$$\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|,\ \|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|,\ \|f\| = 0 \rightleftarrows f = 0$$

ヲ満足セシメル。

$L_1$ = unit ヲ附加シタ ring ヲ R:

$$Z \in R \rightleftarrows Z = \alpha 1 + f,\ f \in L_1$$

$$\|Z\| = |\alpha| + \|f\|$$

$$Z \circ Z' = \alpha\alpha' 1\ \ \alpha f' + \alpha' f + f \circ f'$$

トスル。良ク知ラレタ如クRハ"ノルム"ノ意味デcomplete + ringデ、ringトシテノunitヲ含ム。

以下Rヲbicompact group Gノgroup ringト呼ブコトトスル。

Rハbicompact groupノ上ノalmost periodic functions全体ノringヲsub-ringトシテ含ンデ居ル(而モノルムノ意味デdense sub-ringトシテ)[1].

Ideals in R. Rノ部分集合Iガ i) 代数的ニRノ両側idealデ ii) ノルム"‖ ‖"ノ意味デclosedナルトキRノ両側idealト云フ。両側idealIガ≠(0), RナルトキproperトdE、I⊂Jナル

---

(1) 例ヘバBochner, Annals, 40 (1939), pp 773−775,
ナホBochnerガソコデ論ジテヰルコトハA. Markoff, Recueil Math., 46 (1938) デモット詳シク既ニ論ジテアルコトデハナカラウカト思ハレル.

proper 両側 ideal ガナイトキ maximal 両側 ideal ト云フ。

$R$ ノ凡ユル max. 両側 ideal ノ共通部分ガ $Z=0$ ニ限ルトキ $R$ ヲ semi-simple ト云フコトニスレバ Segal ノ主ナ定理ハ

(A) $R$ ノ maximal 両側 ideal $M$ ニヨル residue class ring $R/M$ ハ有限次元

(B) $R$ ハ Semi-simple $\alpha h(s)+\int h(st^{-1})g(t)dt$ ノニツニナル。

<u>(A) ノ証明</u> $L_1$ ハ $R$ ノ max. 両側-ideal デ, $R/L_1$ = complex numbers ハ明カ。

$M$ ヲ max. 両側-ideal デ, $\neq L_1$ トスル。

$R/M=\{E, X, Y, \cdots\cdots\}$, $\|X\|=\inf\limits_{Z\in X}\|Z\|$ トスレバ $R/M$ ハ complete.

$M\neq L_1$ カラ $f\in L_1$, $\overline{\in} M$ ナル $f$ ガ存在スル。今 $f\in X$ トスル max. ナルコトカラ $R/M$ ハ simple (proper ナ両側 ideal ヲ有シナイ). 依ッテ

$$E=\sum_{i=1}^{n} Y_i \underline{X} Z_i$$

ガ成立ツ. $R/M=R_1$ ノ operator トシテ $Y_i\underline{X}Z_i$ ガ凡テ vollstetig ナコトヲ云ヘバ, $E$ (unit) ガ vollstetig, 従ッテ $R_1$ ノ単位球ガ vollstetig トナルカラ Riesz ノ定理デ $R_1$ ハ有限次元ニナル。

サテ $\underline{X}$ ハ $f\in L_1$ ヲ含ム class デアルカラ $Y_i\underline{X}Z_i$

ニ含マレル $R$ ノ元素ハ悉ク $\in L_1$, $R$ カラ $R/M = R_1$ ヘノ寫像ハ連續ダカラ $Y_i \overline{X} Z_i$ ガ $R_1$ ノ vollstetig ナ operator デアルコトヲ云フタメニハ，結局 $h(s) \in L_1$ ニヨル integral operator

$$\int_G h(st^{-1})\, g(t)\, dt, \quad g(t) \in L_1$$

ガ $L_1$ ノ norm デ vollstetig デアルコトヲ云ヘバ十分デアル。

此ノ最後ノコトハ compact ナ函數集合ニ對スル Kolmogoroff-Riesz ノ定理カラ云ヘル。[1]

(B) ノ証明　$R$ ノ凡テノ max. 両側 ideal ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ トスル。

今 $Z \in R$, $Z \in \prod_{A \in \mathfrak{M}} A$ トスル。$A = L_1 \in \mathfrak{M}$ デアルカラ

$$Z = f(s) \in L_1.$$

証明スベキコトハ $f(s) \neq 0$ ナラバ $f(s) \notin A$ ナル $A \in \mathfrak{M}$ ガ存在スルコト．

integral equation ハ

$$f \circ g = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, d\mu_t = \lambda g(s) \qquad (*)$$

---

(1) M. Riesz, Acta Szeged, 6.

之ハ三村征雄氏ノ御教示ニヨル，ナホ吉田耕作氏モ連續函數デ近似スレバ vollstetig ガ証明デキルコトヲ注意サレタ．両氏ニ厚ク感謝シタイ．

ハ，アル$\lambda_0 \neq 0$ニ對シテ解ヲモツ。$\lambda_0$ニ對スル linearly independent ナ固有函數ヲ

$$g_1(s),\ g_2(s),\ \cdots\cdots,\ g_n(s)$$

トスル（以上 $f(st^{-1})$ ノ vollstetig ナルコトカラ），茲デ $g_i(s)$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ハ有界 continuous トシテヨイ。

良ク知ラレタ考ヘニヨッテ $g(t)$ ガ $\lambda=\lambda_0$ ニ對スル (*) ノ固有函數デアレバ，凡テノ $a\in G$ ニ對シテ $g(ta)$ モ亦固有函數デアル，從ッテ

$$g_i(ta)=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(a)\,g_j(t),$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n \quad (**)$$

$Z=\alpha 1+h(s)\in R$ ニ對シテ $n$ 次ノ matrix

$$D_n(Z)=\alpha E_n+\int_G \{u_{ij}(a^{-1})\}_{i,j}\,h(a)\,d\mu_a$$

ヲ對應サセレバ，$D_n(Z)=0$ ナル $Z$ ノ全体ハ $R$ デ両側 ideal ヲ作ル。之ヲ $A_1$ トスレバ $A_1 \ni f(s)$ ナルコトガ云ヘサヘスレバ $f(s)$ ヲ含マナイ max. 両側 ideal ガアルコトガ分ル。

$$D_n(f)=\int_G \{u_{ij}(a^{-1})\}_{i,j}\,f(a)\,d\mu_a \neq 0$$

ナルコトノ証明ハ次ノ様ニスレバヨイ様デアル。

(*), (**) カラ

$$\lambda g_i(s) = \int_G f(st^{-1}) g(t) \, d\mu_t = \int_G f(t) \, g(t^{-1}s) \, d\mu_t$$

$$= \int_G f(t) \left( \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(s) \, g_i(t^{-1}) \right) d\mu_t$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, u_{ij}(s)$$

然ルニ

$$\beta_i = \int_G f(t) \, g_i(t^{-1}) \, dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\lambda} \int_G u_{ij}(t^{-1}) f(t) \, d\mu_t$$

茲ニモシ悉ク $\int_G u_{ij}(t^{-1}) f(t) \, d\mu_t = 0$ ナラバ $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \text{-----}, n$

従ツテ $g_i(s) \equiv 0, \ i = 1, 2, \text{-----}, n$

然ルニ $f(s) \neq 0$ ナラバ必ズ $\lambda_0 \neq 0$ ナル固有値ガアルノダカラ $f \bar{\in} A$ ナル max. ideal ノ存在ガ証明サレルコトニナル。

(西大第二三六八号)