1062. 級數論ノ一問題

泉 信一, 洲之内源一郎 (東北大)

"級數 $\sum a_n$ ニ於テ $a_n \downarrow 0$ 且ツ $\sum a_n$ ガ收斂スルナラバ $na_n \to 0$ トナル。"

コレハ古典的ナ Olivier ノ定理デアル. コレヲメグッテ Vallée-Poussin, Ostrowski, Knopp, Cesàro, Rademacher, 泉等ノ研究ガアル. 其ノ中 Ostrowski ガ Olivier ノモノヲ完成シタ形デハ "$\sum a_n$ ニ於テ $a_n \downarrow 0$ ナルトキニ $\sum a_n$ ガ收斂スルタメノ必要充分條件ハ $\sigma_n = S_n - na_n$ $\left(S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ ガ收斂スルコトデアル。"

デアル. コレラデハ a_n ハ正デアルガコレヲ任意ニスルト Cesàro ハ

"$\sum a_n$ ニ於テ $|a_n| \downarrow 0$, S_n ノ正項ノ數ヲ p_n, 負項ノ數ヲ q_n トスレバ, コノ級數ガ收斂スレバ $(p_n - q_n)a_n \to 0$ デアル。"

ト云フ定理ヲノベテヰル. コレハ明カニ Olivier ノ擴張デアル. コヽデハコレガ上ノ Ostrowski ノ樣ニ完成デキナイカト云フ問題ヲ論ジテミタイ。

$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = S_n$ トオキ $a_\nu = e_\nu u_\nu$, $u_\nu \downarrow 0$ トスルト $\lambda_\nu = \dfrac{1}{u_\nu} \uparrow \infty$ トナル。

(恒等式) $$\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots\cdots+\lambda_n a_n}{\lambda_n}$$

$$=S_n-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)S_1+(\lambda_3-\lambda_2)S_2+\cdots\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1})S_{n-1}}{\lambda_n}$$

ニ於テ上ノ関係式ヲ入レルト

$$S_n-\frac{e_1+e_2+\cdots\cdots+e_n}{e_n}a_n$$

$$=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)S_1+(\lambda_3-\lambda_2)S_2+\cdots\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1})S_{n-1}}{\lambda_n}$$

トナル $S_n\to S$ ナラバ $\{e_n\}$ ノ如何ニ拘ラズ Toeplitz ノ定理ニヨリ

$$\sigma_n=S_n-\frac{e_1+e_2+\cdots\cdots+e_n}{e_n}a_n\to S$$

トナル．コレハ Olivier Cesàro ノ定理ノ型デアル．コノ型ハ総和法 Abelian ノ問題ニスギナイ．次ニ

$$\sigma_n\to S \quad ヨリ \quad S_n\to S$$

ヲ結論スル問題ハ Tauber 型ノ問題ニナル．$\{e_n\}$ ガ全部正ナラバ，換言スレバ $\sum' a_n$ ガ正項級数ナラバコレハ収斂スルカ $+\infty$ ニ発散スルカ丈ケデアル。故ニ $\sigma_n\to S$ カラ $S_n\to S$ ハ明ラカデアル．コレガ Olivier Vallée-Poussin ノ定理ヲ Ostrowski ノ完成シタ型デソノ一証明デアル。

$\{e_n\}$ ニ正負ヲトシセルト一般ノ場合ハドウナルカ不明デアル、少シ條件ヲ入レテ成立スル場合ヲ調ベテミル．

Tauber 型ノ條件ヲ入レルト

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}a_n=\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\,e_n\,\frac{1}{\lambda_k}=\frac{e_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}$$

ガ有界ナラバヨイ。$\{e_n\}$ ガ ± 1 カトラナイトキハ

$$\left|\frac{1}{\dfrac{1}{|a_n|}-\dfrac{1}{|a_{n+1}|}}\right|$$

ガ有界ナラバ逆ガ成立スル．タトヘバ級数ノ各項ガ $\frac{1}{n}$ ナラバ成立スル．又 $\{e_n\}$ ヲ ± 1 トカギル．即チ p_n, q_n ヲ n 項迄ノ正項，負項ノ数トスルトキ

$s_n-(p_n-q_n)|a_n|\to 0$ ヨリ $s_n\to 0$ ナル場合ニ問題ヲ限定シヨウ。

$$今\ \sum(p_n-q_n)^{-2}<\infty,\quad (p_n-q_n)\sum_{m=n}^{\infty}(p_m-q_m)^{-2}\to 0$$

トスル。 $s_n\equiv(p_n-q_n)\sigma_n$ トオクトキ

$$s_n-(p_n-q_n)|a_n|=s_n-(p_n-q_n)\varepsilon_n a_n$$
$$(\varepsilon_n=\operatorname{sgn} a_n)$$
$$=(p_n-q_n)\sigma_n-\varepsilon_n(p_n-q_n)\{(p_n-q_n)\sigma_n-(p_{n-1}-q_{n-1})\sigma_{n-1}\}$$
$$=\varepsilon_n(p_n-q_n)(p_{n-1}-q_{n-1})(\sigma_{n-1}-\sigma_n)$$
$$\therefore\ \sigma_{n-1}-\sigma_n=O\{(p_n-q_n)^{-1}(p_n-q_{n-1})^{-1}\}$$
$$=O((p_n-q_n)^{-2})$$

従ッテ $\sigma_n\to A$ 且ツ $s_n=(p_n-q_n)A+o(1)$

従ッテ $a_n=A+o(1)$ 乃チ $A=0$ $\therefore$ $s_n\to 0$

カクシテ証明サレタ。

コレラノ問題ハ $\{e_n\}$ ニ條件ヲ入レテ論ジタガ無條件ニハ定理ノ成立ハ難シイノデハナカラウカ。