1061. Spectral Theorem ノ証明ニ就テ

吉田　耕作（名大）

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ニ於ケル有界ナ Hermite 作用素 T ノ spectre 分解定理ヲ束論的ニ取扱フコトハ大分以前カラ行ハレテヰル。筆者モ「位相数学第三巻第二号」ニ「Stone - Lengyel ノ方法ノ束論的 version」トシテ一ツノ方法ヲ述ベタコトがアル。

T カラ generate サレタ環 R ハ $X \in R$ が positive definite —— 全テノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ対シ $(X\cdot f, f) \geqq 0$ —— ナルトキニ $X \geqq 0$ ト書ケバ

(1) vector 束ニナリ然モ σ-complete.

(2) $X \geqq 0,\ Y \geqq 0$ ナラバ $XY \geqq 0$

(3) 単位作用素 I ヲトレバ，全テノ $X \in R$ ニ対シテ $\alpha > 0$ ヲ $-\alpha I \leqq X \leqq \alpha I$ ナル如ク定メ得ル。

ノ三條件ヲ満足スル．上掲拙論ニヨレバ

$X > 0$ ナルトキ

$$E_\lambda = I - \inf\left(I, \frac{X}{\lambda}, \frac{X^2}{\lambda^2}, \cdots\cdots, \frac{X^n}{\lambda^n}, \cdots\right)$$

トスレバ $(\lambda > 0)$, $\{E_\lambda\}$ ハ X ノ「単位分解」ニナリ

$$X = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$$

コレデ spectre 定理ガ証明デキタ譯ニナル。

然シ「$\mathcal{R}$ ガ vector 束ニナル」証明ヲ普通ノ F. Riesz ノ論法（Acta Szeged, 5, 23–54）デヤル積リデアル以上 spectre 定理ノ本質的？ナ別証明トハ云ヒ難イ。コノ点ハ今マデ知ラレテヰル束論的証明全テニ通ズル難点？デハアルマイカ。

所デ最近発表サレタ I. Vernikoff, S. Krein, A. Tovbin ノ論文[1]ノ結果ヲ使フナラバ別証明ガ出来ル譯ニナルヤウニ思フノデ之ヲ述ベテミタイ。蛇足ナガラ上ノ三氏ノ論文ノ紹介ノ積リニモ受取ッテ頂キタイ。以上ヲ前置キトスル。

先ヅ $X \geqq 0$ 且ツ $X \neq 0$ ナルトキ $X > 0$ ト書クコトニスレバ，$\mathcal{R}$ ニ於テハ

(4) $X>0,\ Y>0$ ナラバ $X+Y>0$

(5) $X>0,\ \lambda>0$ ナラバ $\lambda x>0$

及ビ (2), (3) ノ成リ立ツコトハ明カ[2]. $\mathcal{R}$ ノ two-sided いである $\mathfrak{N}$ ハ次ノ條件ヲ満足スルトキニ「convex」デアルト云フ。

$x>0,\ x\in\mathfrak{N}$ ナラバ $-x<y<x$ ナル y 全テ $\in\mathfrak{N}$.

凸いである $\mathfrak{N}$ ニヨル剰餘環 $\mathcal{R}/\mathfrak{N}$ ハ，$X>0$ ヲ含ム

---

(1) C.R. URSS, 30 (1941), 758–767.

(2) 今ノタメニ (2) ノ証明ハ最後ニ附ケ加ヘトク。ソノトキニ必要ニナルガ暫ラク $\mathcal{R}$ ノ「可換環」ナルコトハ用ヒナイデ済ム。

residual class $\neq \mathfrak{N}$ ヲ >0 ト書ケバ (4), (5), (2), (3) ヲ満足サレルコトガ $\mathfrak{N}$ ノ凸性カラワカル. 例ヘバ (4) ノ証明. $R/\mathfrak{N} \ni \bar{X}, \bar{Y}$, $\bar{X}>0$, $\bar{Y}>0$ トスレバ $\bar{X} \ni X$, $\bar{Y} \ni Y$ 且ツ $X>0$, $Y>0$ ナル如キ $X, Y \in R$ ガ存在スル。然ラバ $0<X+Y \in \bar{X}+\bar{Y}$ ダカラ $\bar{X}+\bar{Y} \neq \mathfrak{N}$ ガ云ヘレバヨイ。若シ $\bar{X}+\bar{Y}=\mathfrak{N}$ トスレバ $X+Y \in \mathfrak{N}$. 従ッテ $0<X<X+Y$ ト $\mathfrak{N}$ ノ凸性カラ $X \in \mathfrak{N}$ トナリ $\bar{X}>0$ ナル假定ニ反スル。

扨テ transfinite induction ニヨリ, 任意ノ non-trivial two-sided convex ideal ニ對シ之ヲ含ム maximal convex ideal (=m. c. いである) $\mathfrak{N}$ ノ存在ガ云ヘル。

$R/\mathfrak{N}=\bar{R}$ ハ simple (convex non-trivial ideal ヲ含マナイ) ダガ斯ルモノハ実数体ト isomorphic ナコトガ証明サレル. 以下其ノ証明.[1] 先ヅ $\bar{R}$ ハ Archimedean 即チ: $\underset{n\to\infty}{\text{order-}\lim} \frac{1}{n}\bar{I}=0$ 何者,

$\bar{I} > n\bar{Y}$ $(n=1, 2, -----)$, $\bar{Y}>0$ トスレバ

$$\underset{Z}{E}\{-\eta\bar{Y} \leqq \bar{Z} \leqq \eta\bar{Y}\}$$

ガ non-trivial convex ideal ニナッテ了フカラ。故ニ $\bar{R} \neq \{\lambda\bar{I}, -\infty<\lambda<\infty\}$ トスレバ $\bar{X} \neq 0$ ガ存在シ

---

(1) Krein 等ノ証明ヨリ幾分簡單カト思フ. 筆者ノ vector 束表現ト全ク同方法デアルコトニ注意セラレタイ。

テ全テノ λ ニ対シテ $\overline{X} \neq \lambda \overline{I}$. 今

$$\lambda_0 = \inf_{\lambda} \{\lambda \overline{I} \geqq \overline{X}\}$$

トヲケバ Archimedean ト云フコトカラ $\lambda_0 \overline{I} - \overline{X} > 0$.
$\overline{Y} = \lambda_0 \overline{I} - \overline{X}$ トヲケバ

$$\underset{Z}{E}\{-\eta \overline{Y} \leqq \overline{Z} \leqq \eta \overline{Y}\}$$

ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ non-trivial convex ideal ニナッテ了フ。

結局 simple ナ $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ ハ実数体ニ同型ニナッタ。故ニ $\mathfrak{R}$ ノ m.c. ideal $\mathfrak{M}$ ノ全体ヲ $\widetilde{\mathfrak{M}}$ トスレバ $x \in \mathfrak{R}$ ニ homomorphism $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ デ x ニ對應スル實数 $x(\mathfrak{M})$ ヲ對應サセルコトニヨリ, $\mathfrak{R}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ノ上ノ有界函数 $x(\mathfrak{M})$ ノ作ル或ル環 $\mathfrak{R}(\widetilde{\mathfrak{M}})$ デ homomorphic ニ表現サレタコトニナル。

$\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}(\widetilde{\mathfrak{M}})$ ガ isomorphic ナタメノ充分條件トシテ $\mathfrak{R}$ ガ Archimedean デアレバヨイ。何者, $X \neq \lambda I$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ トスレバ $\lambda_0 = \inf_{\lambda}\{\lambda I \geqq X\}$ $\mu_0 = \sup_{\lambda}\{X \geqq \lambda I\}$ トヲクトキ $\lambda_0 > \mu_0$. 故ニ例ヘバ $\lambda_0 \neq 0$. 然ラバ non-trivial convex ideal $\underset{Z}{E}\{-\eta Y \leqq Z \leqq \eta Y\}$, $Y = \lambda_0 I - X$, ヲ含ム m.c. ideal $\mathfrak{M}$ ハ Y ヲ含ムカラ X ヲ含マナイ。—— X ヲ含メバ $\lambda_0 \neq 0$ ニヨリ $I \in \mathfrak{M}$ トナリ矛盾。

扨テ 例ニヨリ $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ニ weak topology ヲ入レル。
即チ

$$\mathop{\mathcal{E}}_{\mathfrak{x}} \left\{ |X_i(\mathfrak{x}) - X_i(\mathfrak{x}_0)| < \varepsilon_i,\ -I \leqq X_i \leqq I \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \right\}$$

ノ如キ集合 $\subseteqq \tilde{\mathfrak{X}}$ ヲ $\mathfrak{x}_0$ ノ近傍トスレバ, $\tilde{\mathfrak{X}}$ ハ bicompact 且ツ各 $X(\mathfrak{x})$ ハ $\tilde{\mathfrak{X}}$ ノ上デ連續ニナル。

連續函數環 $\mathcal{R}(\tilde{\mathfrak{X}})$ ハ $\mathcal{R}$ ニ同型且ツ i) 恒等的ニ 1 ナル函數 $I(\mathfrak{x})$ ヲ含ム ii) $\tilde{\mathfrak{X}}$ ノ相異ナル二点 $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ニ對シ $X(\mathfrak{x}_1)=0,\ X(\mathfrak{x}_2)=1$ ナル如キ連續函數 $X(\mathfrak{x})$ ヲ含ム. 故ニ良ク知ラレタヤウニ $\mathcal{R}(\tilde{\mathfrak{X}})$ ハ $\tilde{\mathfrak{X}}$ ノ上デ連續ナ函數ノ全体ノ中デ, 一様收斂ノ意味デ稠密デアル. 故ニ特ニ $\mathcal{R}$ ガ

(6) ノルム $\|X\| = \inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda I \geqq X \geqq -\lambda I\}$ ニヨッテ完備ナ距離空間ヲ作ル.

ナラバ $\mathcal{R}$ ハ, $\tilde{\mathfrak{X}}$ 上ノ連續函數全体ニ semi-ordered ring トシテ同型, 従ッテ $\mathcal{R}$ ハ vector 束ニナル。

以上ヲ準備トシテ初メノ作用素環 $\mathcal{R}$ ニ帰ル。$\mathcal{R}$ ガ (4), (5), (2), (3), (6) ヲ満足スルコトハ明カダカラ $\mathcal{R}$ ハ vector 束. vector 束ナルコトワカッテミレバ σ-complete ナコトモ明カ. 即チ作用素環 $\mathcal{R}$ デハ

$$X_1 \leqq X_2 \leqq \cdots\cdots \leqq Y$$

ナラバ $\sup\limits_i X_i$ ガ存在スルコトモ容易ニワカルカラデアル。

注意. 念ノタメニ作用素環 $\mathcal{R}$ ガ (2) ヲ満足スルコ

トヲ Riesz ニ従ッテ証明シトク。$0 \leqq X \leqq I$ ナルトキ $X=\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$, $X_n \in R$ ト書ケルコトガ云ヘルトヨイ。同ジク $Y=\sum_{n=1}^{\infty} Y_n^2$, $Y_n \in R$, ト書ケテ R ノ可換性カラ

$$XY=\sum_{n,m}(X_n Y_m)^2 \geqq 0$$

偖テ X_n ハ順次

$$X_1=X, \quad X_{n+1}=X_n - X_n^2$$

デ定義スレバヨイ。何者

$$X_{n+1}=X_n^2(I-X_n)+X_n(I-X_n)^2,$$

$$I-X_{n+1}=(I-X_n)+X_n^2$$

ニヨリ $X_n \geqq 0$, $I-X_n \geqq 0$ トスレバ $X_{n+1} \geqq 0$, $I-X_{n+1} \geqq 0$ ヲ得ルカラ $X_n \geqq 0$ $(n=1,2,\text{-----})$.

然シテ $X=\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + X_{n+1}$ ニヨリ

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 \cdot f, f) \leqq (X \cdot f, f)$$ 従ッテ $\lim_{k\to\infty}(X_k^2 \cdot f, f)=0$

故ニ $X=\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2$ (以上)